TM 2019-20 (sujet 34)

Géométrie hyperbolique

Lorsqu'on cherche à établir quelles sont les hypothèses minimales dont on a besoin pour faire de la géométrie, on obtient une liste d'*axiomes*. Euclide (300 av. J.-C.) a effectué ce travail pour la géométrie du plan et a abouti à une formulation dont le dernier axiome est celui-ci :

> Pour toute droite et tout point en-dehors de cette droite, il existe une unique droite parallèle passant par ce point.

Après diverses tentatives de démontrer cette propriété à partir des axiomes précédents, on s'est rendu compte qu'il était possible de construire des exemples de géométrie respectant le reste des axiomes mais contredisant l'axiome des parallèles. On peut par exemple choisir de contredire l'axiome des parallèles en exigeant qu'il existe une infinité de parallèles par un point extérieur. La géométrie obtenue ainsi est dite *hyperbolique*.

Les propriétés de cette géométrie sont surprenantes. Par exemple, le théorème de Pythagore n'y fonctionne pas et les angles d'un triangle hyperbolique ne donnent pas 180 degrés lorsqu'on les additionne.

Dans ce travail, l'élève devra détailler les notions d'*axiomatique* et de modèles de géométrie, puis *comparer différents modèles de la géométrie hyperbolique*, et en explorer les propriétés, en fournissant quelques démonstrations.

Pour la rédaction de ce travail, l'utilisation du langage LaTeX est encouragée et sera volontiers encadrée.

Luc Genton