Mathématiques

1C

Sylvain Amaudruz

Table des matières

1 Les nombres

Le monde des nombres, que l'on peut rencontrer aussi bien dans la vie courante que dans les manuels de mathématiques, est à la fois complexe et varié. Ce chapitre est l'occasion d'observer son organisation.

1.1 Nombres usuels

Il est possible de classer les nombres dans différents ensembles :

- Les nombres qui servent à dénombrer, appelés **nombres entiers naturels**. Leur ensemble est désigné par le symbole $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; ...\}$$

- Les nombres entiers qui sont positifs et négatifs, appelés **nombres entiers relatifs**. Leur ensemble est désigné par le symbole $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$$

- Les nombres pouvant s'écrire sous la forme d'une fraction de nombres entiers relatifs, sont appelés **nombres rationnels**. Leur ensemble est désigné par le symbole $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \{...; -98,45; ...; -\frac{7}{5}; ...; -1; ...; \frac{1}{4}; ...; 1,\bar{3}; ...; 80'000; ...\}$$

- Tous les nombres utilisés dans la vie de tous les jours, appelés **nombres réels**. Leur ensemble est désigné par le symbole $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \{...; -98,45; ...; -\pi; ...; -\frac{7}{5}; ...; -1; ...; 1,\bar{3}; ...; \sqrt{2}; ...; 57,10100100010...; ...; 800; ...\}$$

En fait, ces ensembles sont strictement inclus[1] les uns dans les autres, ce qui peut se noter mathématiquement

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

ou se représenter à l'aide d'un diagramme de Venn.

1. Le symbole $\subset$ se lit *est inclus dans*.

Exemple
Placer les nombres ci-dessous dans le diagramme de Venn représentant les ensembles de nombres.

$$5 \quad 0{,}15 \quad -8 \quad \sqrt{-1} \quad 2,4\overline{23} \quad \pi \quad \frac{3}{4} \quad (-3)^2 \quad \sqrt{5} \quad -3'000 \quad \frac{1}{0} \quad 72{,}888... \quad -602{,}51 \quad \sqrt{16}$$

1.2 Nombres premiers

Un nombre entier positif est dit **premier** s'il admet exactement deux diviseurs, à savoir 1 et lui-même.

Il y a une *infinité* de nombres premiers. Voici une liste des nombres premiers inférieurs à 2'000.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997
1009	1013	1019	1021	1031	1033	1039	1049	1051	1061	1063	1069
1087	1091	1093	1097	1103	1109	1117	1123	1129	1151	1153	1163
1171	1181	1187	1193	1201	1213	1217	1223	1229	1231	1237	1249
1259	1277	1279	1283	1289	1291	1297	1301	1303	1307	1319	1321
1327	1361	1367	1373	1381	1399	1409	1423	1427	1429	1433	1439
1447	1451	1453	1459	1471	1481	1483	1487	1489	1493	1499	1511
1523	1531	1543	1549	1553	1559	1567	1571	1579	1583	1597	1601
1607	1609	1613	1619	1621	1627	1637	1657	1663	1667	1669	1693
1697	1699	1709	1721	1723	1733	1741	1747	1753	1759	1777	1783
1787	1789	1801	1811	1823	1831	1847	1861	1867	1871	1873	1877
1879	1889	1901	1907	1913	1931	1933	1949	1951	1973	1979	1987
1993	1997	1999									

Une propriété importante des nombres entiers stipule que *tout nombre entier positif se décompose de manière unique en un produit de nombres premiers.*

Exemples
Décomposer les nombres ci-dessous en produit de nombres premiers.

a) 10 =

b) 72 =

c) 2'520 =

d) 25'687 =

1.3 Encadrements et arrondis

Il n'est pas toujours possible d'écrire un nombre réel en utilisant son écriture décimale complète. On est alors amené à utiliser des encadrements de celui-ci au moyen de valeurs approchées.

Encadrer un nombre réel, c'est le situer entre deux autres nombres réels :

- un nombre réel plus petit, appelé **valeur approchée par défaut**,
- un nombre réel plus grand, appelé **valeur approchée par excès**.

La **précision** de l'encadrement est l'écart entre la valeur par excès et la valeur par défaut.

Exemple
La population d'une ville est égale à $557'362$ habitants. Encadrer l'effectif de cette population à 100'000 près.

L'utilisation des valeurs approchées est très fréquente, aussi bien dans la vie quotidienne que dans les problèmes mathématiques. En pratique, entre une valeur approchée par défaut et une valeur approchée par excès, on essaiera de choisir celle qui se rapproche le plus de la réalité, appelée **valeur arrondie**.

Concrètement, pour arrondir un nombre à une précision donnée, on commence par l'encadrer avec la précision souhaitée, puis on choisit :

- la valeur approchée par défaut lorsque la décimale suivante vaut : 0, 1, 2, 3 ou 4,
- la valeur approchée par excès lorsque la décimale suivante vaut : 5, 6, 7, 8 ou 9.

Exemple
Encadrer, puis donner une valeur approchée de $7'463,0952$ aux précisions suivantes :

au millier :

à la centaine :

à la dizaine :

à l'unité :

au dixième :

au centième :

au millième :

1.4 Les quatre opérations dans $\mathbb{R}$

Les quatre opérations dans $\mathbb{R}$ sont l'addition $(+)$, la soustraction (-), la multiplication $(\cdot)$ et la division $(\div)$.

Addition $(+)$

Les nombres que l'on additionne sont les *termes* et le résultat obtenu est leur *somme.*

L'addition possède les propriétés suivantes :

- l'addition est *commutative* : $a+b=b+a$
- l'addition est *associative* : $(a+b)+c=a+(b+c)$
- l'addition possède 0 comme *élément neutre* : $a+0=a$
- tout nombre a possède un *opposé* $-a$: $a+(-a)=0$

Soustraction (-)

La soustraction de deux nombres revient à additionner au premier l'opposé du deuxième : $a - b = a + (-b)$.

Les nombres que l'on soustrait sont les *termes* et le résultat obtenu est leur *différence.*

Multiplication ($\cdot$)

Les nombres que l'on multiplie sont les *facteurs* et le résultat obtenu est leur *produit.*

La multiplication possède les propriétés suivantes :

- la multiplication est *commutative* : $a \cdot b = b \cdot a$
- la multiplication est *associative* : $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition :

  $$a \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d \text{ et } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

  ou encore $(a + b)(c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$.
- la multiplication possède 1 comme *élément neutre* : $a \cdot 1 = a$
- tout nombre a non nul possède un *inverse* $\dfrac{1}{a}$: $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$

Division ($\div$)

La division de deux nombres revient à multiplier le premier par l'inverse du second : $a \div b = a \cdot \dfrac{1}{b}$.

Le nombre que l'on divise est le *dividende*, le nombre par lequel on divise est le *diviseur* et le résultat obtenu est leur *quotient.*

Règle des signes

De la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition on déduit la règle des signes :

Multiplication	Division
$+ \cdot + = +$	$+ \div + = +$
$+ \cdot - = -$	$+ \div - = -$
$- \cdot + = -$	$- \div + = -$
$- \cdot - = +$	$- \div - = +$

En d'autres termes, *multiplier ou diviser deux nombres de même signe donne un résultat positif, et multiplier ou diviser deux nombres de signe différent donne un résultat négatif.*

Exemples
Calculer.

a) $3 \cdot 8 =$

b) $6 \div 2 =$

c) $3 \cdot (-8) =$

d) $6 \div (-2) =$

e) $(-3) \cdot 8 =$

f) $(-6) \div 2 =$

g) $(-3) \cdot (-8) =$

h) $(-6) \div (-2) =$

Plus généralement, *multiplier ou diviser un nombre pair de nombres négatifs donne un résultat positif, et multiplier ou diviser un nombre impair de nombres négatifs donne un résultat négatif.*

Exemples
Calculer.

a) $2 \cdot (-3) \cdot (-8) \cdot 0,01 \cdot (-10) =$

b) $[(-3) \cdot (-2) \cdot 2] \div [(-4) \cdot (-0,1)] =$

Priorités des opérations

Quand une expression contient à la fois plusieurs des opérations mentionnées ci-dessus, par exemple le calcul

$$8 + 3 \cdot 4 - (7 + 3) \div 2 = ?$$

il y a un ordre dans lequel il faut les effectuer. Plus précisément, on effectue dans l'ordre les opérations suivantes :

- les opérations indiquées entre parenthèses, le l'intérieur vers l'extérieur,
- les puissances et racines,
- les multiplications et divisions,
- les additions et soustractions de gauche à droite.

Exemples

a) $8 + 3 \cdot 4 - (7 + 3) \div 2 =$

b) $3^2(4 + 5) =$

c) $6 - 3\,[2(5 + 7) - (8 - 5)] =$

d) $\dfrac{(2 - 8 \div 4)3 + 25}{-(3 + 2)} =$

1.5 Les puissances

Définition

Soit n un entier strictement positif et a un nombre réel. On appelle **puissance n-ième de a** ou **a à la puissance n**, le nombre noté $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n facteurs}$.

Le nombre a s'appelle la **base** de la puissance et le nombre n s'appelle l'**exposant** de la puissance.

Exemples

Calculer les expressions ci-dessous.

a) $3^3 =$

b) $(0,1)^6 =$

c) $(-2)^5 =$

d) $(-3)^4 =$

Il est possible de généraliser la notion de puissance à des exposants entiers négatifs ou nuls de la manière suivante :

$$a^0 = 1 \text{ et } a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Propriétés

Soit m, n des entiers et a, b des nombres réels. Les propriétés des puissances sont :

a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

b) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

c) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, si $b \neq 0$

e) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, si $a \neq 0$

Exemples

Simplifier les expressions ci-dessous.

a) $3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 =$

b) $(3^2)^4 =$

c) $\frac{3^4}{3^6} =$

Notation scientifique

Écrire un nombre en **notation scientifique** signifie écrire ce nombre comme le produit d'un nombre qui possède un chiffre non nul avant la virgule par une puissance de 10.

Exemples
Écrire les nombres ci-dessous en notation scientifique.

a) $328 =$

b) $1'140'000'000 =$

c) $0,0045 =$

d) $5 =$

La notation scientifique a pour principal intérêt de simplifier l'écriture des calculs. Ainsi, il est par exemple beaucoup plus agréable d'exprimer la masse d'un atome d'hydrogène par $1,7 \cdot 10^{-24}$ g que par l'expression : $0,000'000'000'000'000'000'000'001'7$ g.

1.6 Les fractions

Définition

Soit a et b des nombres entiers avec $b \neq 0$.

Le nombre $\dfrac{a}{b}$ est appelé **fraction**.

Le nombre a est appelé **numérateur** ; son rôle est de *numéroter* : $\dfrac{1}{\ }, \dfrac{2}{\ }, \dfrac{3}{\ }, ...$

Le nombre b est appelé **dénominateur** ; son rôle est de *nommer* : $\dfrac{\ }{2}$ pour les demis, $\dfrac{\ }{3}$ pour les tiers, $\dfrac{\ }{4}$ pour les quarts, ...

Le trait qui sépare le numérateur du dénominateur s'appelle la **barre de fraction** et symbolise une division. Ainsi la fraction $\dfrac{a}{b}$ revient à diviser a par b.

Les fractions possèdent la propriété suivante : *le développement décimal d'une fraction est fini ou illimité périodique.*

Exemples
Déterminer le développement décimal des fractions ci-dessous.

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{6}{2}$

c) $\frac{4}{3}$

d) 18%

e) 5

f) $\frac{1}{7}$

On a aussi la propriété réciproque : *tout nombre dont le développement décimal est fini ou illimité périodique est une fraction.*

Exemples
Déterminer des fractions correspondant aux nombres ci-dessous.

a) $0,12$

b) 4

c) $2,73$

d) $0,\overline{3}$

e) $0,\overline{9}$

f) $1,\overline{34}$

Pour représenter géométriquement la fraction $\frac{a}{b}$, on symbolise l'unité par une forme (un rectangle, un disque, ...) divisée en b parties égales, dont exactement a parties sont hachurées.

Exemples

a) Représenter géométriquement $\frac{3}{4}$:

b) Représenter géométriquement $\frac{4}{3}$:

Amplification et simplification

On peut multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur d'une fraction par le même nombre (non nul) sans en changer la valeur.

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}}$$

Exemples

a) En amplifiant la fraction $\frac{2}{3}$ par 5 on obtient :

b) En simplifiant la fraction $\frac{21}{3}$ par 3 on obtient :

Une fraction $\frac{a}{b}$ est dite **irréductible** si elle ne peut plus être simplifiée. Généralement, on écrit une fraction sous forme irréductible.

Si la fraction à étudier n'est pas facile à simplifier, on écrit le numérateur et le dénominateur comme produit de leurs facteurs premiers ; ensuite on peut simplifier la fraction afin de la rendre irréductible.

Exemples

Simplifier les fractions ci-dessous.

a) $\frac{650}{120} =$

b) $\frac{95'256}{532} =$

Multiplication

Multiplier deux fractions revient à multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, sans oublier de simplifier s'il y a lieu.

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$$

Exemples
Calculer.

a) $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{9}{8} =$

b) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 =$

c) $\dfrac{8}{5} \cdot \dfrac{21}{10} \cdot \dfrac{25}{12} \cdot \left(\dfrac{2}{7}\right)^2 =$

Inverse

Pour déterminer l'inverse d'une fraction, il suffit de permuter le numérateur et le dénominateur. En d'autres termes, l'inverse de $\dfrac{a}{b}$ est $\dfrac{b}{a}$.

Exemples

a) L'inverse de $\dfrac{2}{3}$ est :

b) La fraction dont l'inverse vaut 3 est :

Division

Diviser deux fractions, revient à multiplier la première par l'inverse de la seconde.

$$\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$$

On note aussi $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ à la place de $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d}$.

Exemples
Calculer.

a) $\dfrac{5}{3} \div \dfrac{7}{8} =$

b) $\dfrac{19}{7} \div \dfrac{38}{49} =$

Addition et soustraction

Pour additionner deux fractions, on les amplifie d'abord de telle manière qu'elles aient le même dénominateur ; la somme des fractions aura alors pour numérateur la somme des numérateurs des fractions amplifiées, et pour dénominateur le dénominateur commun de ces fractions.

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}} \text{ et } \boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{ad}{cd}+\frac{bc}{cd}=\frac{ad+bc}{cd}}$$

Exemples
Calculer.

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=$

b) $\frac{2}{5}+\frac{3}{7}=$

c) $\frac{1}{8}+\frac{5}{12}=$

Pour la soustraction, on utilise le même procédé que pour l'addition.

$$\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}} \text{ et } \boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{d}=\frac{ad}{cd}-\frac{bc}{cd}=\frac{ad-bc}{cd}}$$

Exemples
Calculer.

a) $\frac{2}{7}-\frac{5}{7}=$

b) $\frac{7}{2}-\frac{7}{18}=$

c) $\frac{3}{4}-\frac{5}{26}=$

2 Calcul littéral

2.1 Monômes

On appelle **monôme** tout nombre réel, toute lettre, toute expression algébrique qui peut être obtenue par la multiplication de nombres et de lettres.

Exemples

a) b)

c) d)

Généralement, on note un monôme sous *forme réduite* (on le fera tout le temps dorénavant) ; cela signifie que l'on note d'abord le facteur numérique, appelé **coefficient**, puis le produit des lettres, appelé **partie littérale**, dans l'ordre alphabétique. Chaque lettre est écrite une seule fois, si nécessaire à l'aide d'un exposant.

Exemples
Écrire les monômes ci-dessous sous forme réduite, puis déterminer leur coefficient et leur partie littérale :

a) 2 b) $-3xyz$

c) a^2cez d) $4bananes$

e) $fg4fg(-5)$ f) $1xy2xy3xy4xy5xy$

Deux monômes sont dits **semblables** s'ils ont la même partie littérale.

Exemples
Déterminer si les monômes ci-dessous sont semblables.

a) $5a$ et $-3a$

b) $25xy^2uz$ et $-9725xy^2u^2z$

Le **degré d'un monôme relativement à une lettre** est l'exposant de cette lettre dans la forme réduite du monôme.

Le **degré d'un monôme** est la somme de tous les degrés de ce monôme relativement à chacune de ses lettres.

Exemples
Pour chacun des monômes ci-dessous, déterminer son degré, ainsi que son degré relativement à chaque lettre :

a) $25xy^2z^3$

b) $4a^3d$

2.2 Calculs sur les monômes

Addition et soustraction de monômes

Pour additionner des monômes semblables, on conserve la partie littérale commune et on additionne les coefficients. Si les monômes ne sont pas semblables, on ne peut pas simplifier l'écriture de leur somme.

Exemples
a) $5xy - 8xy + (-2xy) + xy =$

b) $4a^2bc^3 + (-a^2bc^3) + 7a^2bc^3 =$

Pour soustraire des monômes semblables, on conserve la partie littérale commune et on soustrait les coefficients. Si les monômes ne sont pas semblables, on ne peut pas simplifier l'écriture de leur différence.

Exemples
a) $5xy - 8xy - (-2xy) =$

b) $-4a^2bc^3 - (-a^2bc^3) - 7a^2bc^3 =$

Produit de monômes

Pour multiplier des monômes, on effectue séparément le produit des coefficients et le produit des parties littérales.

Exemples

a) $(5xyz) \cdot (3xy^2) =$

b) $(2ab^2c^3)^4 =$

2.3 Polynômes

On appelle **polynôme** toute somme de monômes.

Exemples

a)

b)

c)

d)

Généralement, on note un polynôme sous *forme réduite* (on le fera tout le temps dorénavant) ; cela signifie que l'on écrit chacun de ses monômes sous forme réduite et que l'on regroupe les monômes semblables.

Le **degré d'un polynôme relativement à une lettre** est donné par la plus grande puissance de cette lettre dans le polynôme.

Le **degré d'un polynôme** est le plus grand degré des monômes qui le constituent.

Exemples

Déterminer le degré des polynômes ci-dessous en chaque lettre, ainsi que leur degré :

a) $3x^4 + y^2 + x^2 - xyz$

b) $4a^3 + a^2b + 7abc^3$

2.4 Calculs sur les polynômes

Opposé d'un polynôme

Pour déterminer l'opposé d'un polynôme, il suffit de changer le signe de chacun des monômes qui le constituent.

Exemples

a) L'opposé de $2xyz - 3xy + 8z$ est

b) L'opposé de $a + b + c - a^2 - b^2 - c^2$ est

Addition de deux polynômes

Pour additionner deux polynômes, on additionne les monômes qui les constituent.

Exemples

a) $(x + 2y + 3c) + (2x + 3y + c) =$

b) $(4a^2 + 2bc) + (2b^2 - bc) + (a^2) + (-2 + 3b^2) =$

Soustraction de deux polynômes

Pour soustraire deux polynômes, on additionne au premier polynôme l'opposé du second.

Exemples

a) $(x + 2y + 3c) - (2x + 3y + c) =$

b) $(4a^2 + 2bc) - (2b^2 - bc) - [a^2 - (-2 + 3b^2)] =$

Multiplication de deux polynômes

Pour multiplier deux polynômes, on multiplie chaque terme du premier par chaque terme du second et on forme la somme des monômes obtenus.

Exemples

a) $(x + 2y)(2x + y) =$

b) $(a - b + c)(-2a + 3c) =$

c) $3x(x + 2)(5 - x) =$

2.5 Identités remarquables

Les identités remarquables sont des formules qui permettent de calculer plus rapidement certains produits particuliers. Elles sont surtout utiles lorsqu'il s'agit de factoriser un polynôme (cf. paragraphe 2.6).

Le carré de la somme de deux expressions est égal à la somme des carrés des deux expressions augmentée de leur double produit.

$$\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$$

Exemples

a) $(x+3)^2 =$

b) $(4a^2+3b)^2 =$

Le carré de la différence de deux expressions est égal à la somme des carrés des deux expressions diminuée de leur double produit.

$$\boxed{(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2}$$

Exemples

a) $(x-3)^2 =$

b) $(4u-3v^7)^2 =$

Le produit de la somme et de la différence de deux expressions est égal à la différence de leurs carrés.

$$\boxed{(A+B)(A-B) = A^2 - B^2}$$

Exemples

a) $(x-3)(x+3) =$

b) $(4-3c)(3c+4) =$

c) $(-x-y^2)(-x+y^2) =$

2.6 Factorisation

Définition

Factoriser un polynôme, c'est le transformer en un produit de deux ou plusieurs polynômes, appelés *facteurs*.

Exemple

Nous allons étudier trois méthodes de factorisation. D'autres méthodes seront vues en deuxième année. Elles sont présentées dans l'ordre dans lequel il faut habituellement les traiter.

Méthode de mise en évidence

On repère un facteur commun à tous les termes du polynôme à décomposer et on utilise la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Exemples

a) $12x^4 - 8x^2 + 16x =$

b) $9xy^2 + 18x^2y^4 - 36x^4y^2 =$

c) $a(x+y) - b(x+y) =$

Utilisation des identités remarquables

Il faut repérer la bonne identité remarquable à utiliser en fonction du nombre de termes du polynôme ou de leur signe.

Exemples

a) $9x^2 + 6x + 1 =$

b) $4x^2 - 4xy^3 + y^6 =$

c) $16z^4 - 81 =$

Décomposition du trinôme du deuxième degré

On applique cette méthode le plus souvent aux trinômes unitaires x^2+ux+v. Décomposer un tel polynôme, c'est trouver les nombres a et b tels que $a+b=u$ et $a \cdot b = v$. En effet, on a :

$$x^2+ux+v=(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+b^2=x^2+(a+b)x+ab$$

Exemples

a) $x^2+x-6=$

b) $x^2-9x+20=$

c) $x^4-13x^2+36=$

3 Equations

3.1 Définition d'une équation

Une **équation** est une égalité comportant des nombres et des lettres que l'on considère dans l'ensemble des nombres réels, qui peut être juste ou fausse selon les valeurs attribuées aux lettres. Son écriture se compose de trois parties : le *membre de gauche* de l'équation, le *signe d'égalité* et le *membre de droite* de l'équation.

Une équation est dite **sous forme canonique** si l'un de ses membres est nul et l'autre est réduit.

Exemple

Les lettres utilisées dans l'écriture d'une équation sont appelées **inconnues**.

Exemples

a) b)

Le **degré** d'une équation est le degré du polynôme de sa forme canonique.

Exemples
Déterminer les deux membres de l'équation, ainsi que son degré.

a) $x^6 + 1 = 2$

b) $2y + 7 = 9y + 8$

c) $3t^2 + 11 = 3t^2$

Résoudre une équation signifie déterminer l'ensemble des valeurs de l'inconnue qui vérifient l'égalité entre le membre de gauche et le membre de droite. On note S cet ensemble de solutions.

Une équation de degré n peut posséder au plus n solutions.

Exemple
Parmi les valeurs -2, -1, 0, 1, 2, déterminer celles qui sont solutions de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 2 + x$$

Pour résoudre une équation, on utilise généralement les quatre **principes d'équivalence** suivants :

- Premier principe d'équivalence

  On obtient une équation équivalente à une équation donnée en permutant le membre de gauche et le membre de droite.

  Exemple

- Deuxième principe d'équivalence

  On obtient une équation équivalente à une équation donnée en additionnant ou en soustrayant à chacun des membres de l'équation la même expression.

  Exemple

- Troisième principe d'équivalence

  On obtient une équation équivalente à une équation donnée en multipliant ou en divisant chacun des membres de l'équation par une même expression non nulle.

  Exemple

- Quatrième principe d'équivalence

  On obtient une équation équivalente à une équation donnée si on réduit les membres de l'équation par les règles du calcul littéral.

  Exemple

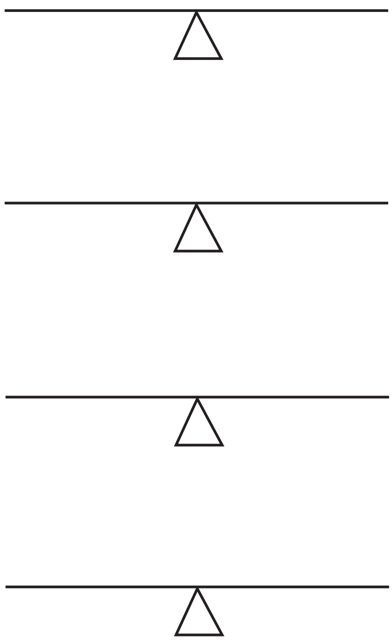
3.2 Equations du premier degré

Lorsqu'on veut résoudre une équation du premier degré, il faut isoler l'inconnue dans l'un des membres de l'équation (gauche ou droite, c'est égal) en utilisant les principes d'équivalence.

Après avoir déterminé l'ensemble des solutions S, il est bon de vérifier s'il est correct, en remplaçant l'inconnue par la ou les valeurs trouvées.

Exemples

a) Nous allons illustrer les principes d'équivalence en résolvant l'équation $3x+1 = x+7$ de manière symbolique (à l'aide d'une balance) et de manière algébrique.



b) Résoudre l'équation : $x + 5 = 2(x + 2) - (x + 13)$

c) Résoudre l'équation : $\dfrac{y}{2} - \dfrac{3y}{5} = \dfrac{y-3}{4} - \dfrac{27}{20}$

3.3 Equations de degré supérieur ou égal à deux

En ce qui concerne les équations de degrés deux, trois et quatre, il existe pour chacune d'elles une méthode de résolution (celle de degré deux va être présentée dans le prochain paragraphe et celles pour les degrés trois et quatre ne vont pas être exposées ici). Par contre, à partir du cinquième degré, il a été démontré qu'il n'existe aucune méthode générale de résolution.

Toutefois, indépendamment du degré de l'équation, lorsqu'il est possible de factoriser l'un des membres de celle-ci de façon à ce que l'autre soit nul, ses solutions se déterminent alors par la méthode suivante :

$$\boxed{A(x)B(x)C(x) = 0 \Longleftrightarrow A(x) = 0 \text{ ou } B(x) = 0 \text{ ou } C(x) = 0}$$

Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs le soit.

Exemples

Résoudre

a) $x^2 + x = 0$

b) $u^2 - 3u - 10 = 0$

c) $x^2 - 8x + 16 = 0$

d) $x^2 - 25 = 0$

e) $z(z-1)(z+4)(3z-7) = 0$

f) $17x^3 - 68x = 0$

g) $x^4 - 16 = 0$

h) $a^8 - a^6 = 0$

3.4 Formule de résolution des équations du deuxième degré

Certaines équations du deuxième degré ne sont pas faciles à résoudre à l'aide de la méthode de factorisation. Dans ce paragraphe, nous allons voir une formule générale qui permet de résoudre toutes les équations du deuxième degré sans aucune exception.

Pour utiliser la formule, il faut d'abord ramener l'équation du deuxième degré sous la forme canonique $ax^2 + bx + c = 0$. Avec $a \neq 0$, car sinon on aurait une équation de la forme $bx + c = 0$ qui est du premier degré.

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé *discriminant.*

Pour résoudre une équation du deuxième degré, trois cas peuvent se présenter :

- si $\Delta > 0$, l'équation possède exactement deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, l'équation possède exactement une solution : $x = -\dfrac{b}{2a}$,
- si $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution dans l'ensemble des nombres réels.

Exemples
Résoudre.

a) $x^2 - 5x + 3 = 0$

b) $4x^2 - 28x = -49$

c) $9z^2 + z = -1$

d) $(9x^2 - 6x + 1)(2x - 1) = 0$

e) $3x^3 - 7x^2 + 10x = 0$

f) $6x^4 - 15x^3 - 9x^2 = 0$

3.5 Applications

Les équations sont souvent utilisées pour résoudre des problèmes. Voici une marche à suivre :

- lire soigneusement tout le problème et effectuer éventuellement un croquis de la situation,
- déterminer l'objet ou la quantité à trouver, choisir l'inconnue avec son unité,
- poser l'équation exprimant la situation décrite,
- résoudre l'équation,
- contrôler les solutions obtenues pour que le problème reste cohérent,
- donner la réponse au problème à l'aide d'une phrase, sans oublier les unités.

Exemples

a) On distribue une somme de CHF $100.-$ à trois enfants : Paul, Marc et Jean. On suppose que Paul reçoit CHF $20.-$ de plus que Marc et CHF $30.-$ de moins que Jean. Combien d'argent a reçu Paul ?

b) On a confectionné une boîte sans couvercle de 48 cm^3 de volume, dont la forme est un parallélépipède rectangle à base carrée. On disposait d'une fine plaque de métal carrée. On a découpé dans chaque coin un carré de 3 cm, puis on a relevé les bords. Quelle était la surface de métal utilisée ?

4 Proportionnalités

4.1 Différents types de proportionnalité

Soit a, b et k des nombres réels, avec $b, k \neq 0$.

Le quotient de a par b est appelé **rapport**.

Deux grandeurs x et y sont **proportionnelles** ou **directement proportionnelles** si leur quotient est constant : $\dfrac{y}{x} = k$ ou $y = kx$.

La grandeur y est **proportionnelles au carré** de la grandeur x si : $\dfrac{y}{x^2} = k$ ou $y = kx^2$.

La grandeur y est **proportionnelles au cube** de la grandeur x si : $\dfrac{y}{x^3} = k$ ou $y = kx^3$.

Deux grandeurs x et y sont **inversement proportionnelles** si leur produit est constant : $xy = k$ ou $y = k\dfrac{1}{x}$.

Le nombre k est appelé **rapport de proportionnalité**.

Exemples
Dans chacune des situations ci-dessous, déterminer, si possible, le type de proportionnalité et compléter les tableaux par les nombres qui conviennent.

a) Une dame décide d'acheter des abricots au prix de CHF 3.- le kg. Voici la table des valeurs obtenues :

Nombre de kilos d'abricots	0	1	2	3		5	6	7	...	x
Prix en CHF	0	3	6	9	12	15		21	...	y=

b) On place des briques sur le piston d'un cylindre contenant un gaz. Chaque fois qu'une brique est déposée, le piston s'enfonce réduisant ainsi le volume du gaz. Voici la table des valeurs obtenues :

Nombre de briques	1	2	3		5	6	7	8	...	x
Volume en cm^3	240	120	80	60	48	40		30	...	y=

c) Voici la table des valeurs illustrant la distance parcourue par un objet en chute libre en fonction du temps :

Temps en s	0	1	2	3	4	5		7	...	x
Distance en m	0	5		45	80	125	180	245	...	y=

d) Voici les prix du billet 2 ème classe pour une même distance, tiré du tarif CFF de 1978.

Simple course	0,80	1,80	2,60	4,60	5,80		7,40	11,20	...	x
Aller et retour	1,60	3,60	5,20	9.-	11.-	10,40	13,20		...	y=

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser essentiellement aux grandeurs qui sont proportionnelles.

4.2 Proportions

Soit a , b , c et d des nombres réels, avec $b, d \neq 0$.

On appelle **proportion** l'égalité de deux rapports : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Exemple

Une propriété des proportions est la *règle des produits croisés*, dont voici l'énoncé :

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c}$$

Une application de cette règle est la célèbre *règle de trois* : étant donné deux paires de grandeurs proportionnelles, on peut alors déterminer une de ces quatre valeurs connaissant les trois autres.

Exemples
Déterminer l'inconnue.

$\frac{a}{3} = \frac{20}{15}$

$\frac{8}{b} = \frac{4}{1,4}$

$\frac{6}{1,5} = \frac{\mathrm{c}}{3}$

$\frac{7}{2} = \frac{49}{d}$

4.3 Applications

Les pourcentages

Un **pourcentage** est une fraction dont le dénominateur vaut 100. Pour l'exprimer, on utilise le signe $\%$.

Exemple
Exprimer $0,04$ en $\%$:

Soit x et y des nombres. Calculer le $y\%$ de x revient à calculer $x \cdot \frac{y}{100}$.

Exemple
Julie fait les magasins le jour des soldes. Elle rentre dans une boutique où tout est soldé à 30%. Elle voit une robe qui lui plaît au prix de CHF 120.-. Quel pourcentage du prix initial va-t-elle payer ? Quel prix va-t-elle payer ?

Soit x et y des nombres. Calculer la valeur dont x représente le $y\%$ revient à calculer $x \div \frac{y}{100}$, ou plus simplement $x \cdot \frac{100}{y}$.

Exemple
Nous avons à disposition 1'470 souris grises. Elles représentent 42% d'une population de souris. De combien de souris cette population est-elle constituée ?

Facteurs de conversion

Un facteur de conversion est une fraction dans laquelle le numérateur et le dénominateur représentent la même grandeur dans des unités différentes. L'utilisation de facteurs de conversion permet d'éviter les erreurs dans les transformations d'unités.

Exemples

a) Convertir $0,15$ en $\%$:

b) Convertir 2 m/s en km/h :

c) Convertir $2,31$ h en heures minutes secondes :

d) Convertir $1'360$ kg/m^3 en g/cm^3 :

Masse volumique

On appelle **masse volumique** d'une matière la masse correspondant à l'unité de volume de cette matière. La masse volumique s'exprime en kg/m^3.

$$\boxed{\text{masse volumique} = \frac{\text{masse}}{\text{volume}}}$$

Voici un tableau donnant quelques exemples de masses volumiques :

Matière	*Masse volumique [kg/m³]*
Aluminium	2'700
Argent	10'500
Bronze	8'800
Cuivre	8'920
Eau	1'000
Fer	7'860
Glace	920
Glycérine	1'260
Or	18'900
Mercure	13'600

Vitesse

On appelle **vitesse** le rapport de la distance parcourue par le temps mis pour la parcourir. La vitesse s'exprime en km/h ou en m/s.

$$\boxed{\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}}$$

Pente

On appelle **pente** le rapport de la dénivellation par la distance horizontale. La pente s'exprime en $\%$.

$$\boxed{\text{pente} = \frac{\text{dénivellation}}{\text{distance horizontale}}}$$

Échelle

On appelle **échelle** le rapport de la distance mesurée sur un plan par la distance réelle mesurée, exprimées dans la même unité.

$$\boxed{\text{échelle} = \frac{\text{distance plan}}{\text{distance réelle}}}$$

L'échelle s'écrit sous la forme d'une fraction dont le numérateur ou le dénominateur vaut 1. La barre de fraction est remplacée par deux points (:).

Taux

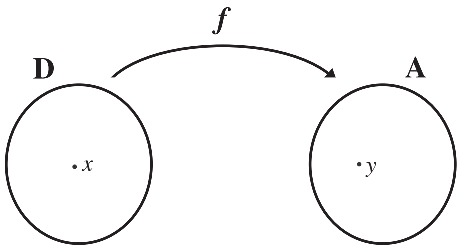
On appelle **taux** le rapport de l'intérêt annuel par le capital considéré. Ce taux s'exprime en $\%$.

$$\boxed{\text{taux} = \frac{\text{intérêt annuel}}{\text{capital}}}$$

5 Fonctions affines

5.1 Le concept de fonction

Une **fonction** f d'un ensemble D vers un ensemble A est une correspondance qui associe à tout élément x de D exactement un élément y de A.



L'ensemble D est appelé *ensemble de départ* de la fonction f et l'ensemble A est appelé *ensemble d'arrivée* de la fonction f.

Si l'élément x de D correspond à l'élément y de A, on dit que y est l'*image de* x *par* f et se note $y = f(x)$.

Exemples

a) A l'aide d'un thermomètre, on mesure à une heure fixe durant chaque jour d'une semaine la température devant le gymnase. On obtient les mesures suivantes :

lu : -2°C   ma : 0°C   me : -1°C   je : 2°C   ve : 0°C   sa : -3°C   di : -1°C

Ces mesures définissent-elles une fonction ? Si oui, déterminer son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée.

b) Considérons la fonction f qui à tout nombre réel, associe son carré. Déterminer une expression algébrique de f, son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée et l'image de 4 par f ?

Une fonction f peut être représentée de trois manières différentes :

- à l'aide d'un *tableau de valeurs* : le tableau associe les diverses valeurs x et $f(x)$,
- à l'aide d'un *graphique* : le graphique est formé par l'ensemble des points du plan de la forme $(x; f(x))$,
- à l'aide d'une *expression algébrique* : elle explicite le lien existant entre les grandeurs x et $f(x)$.

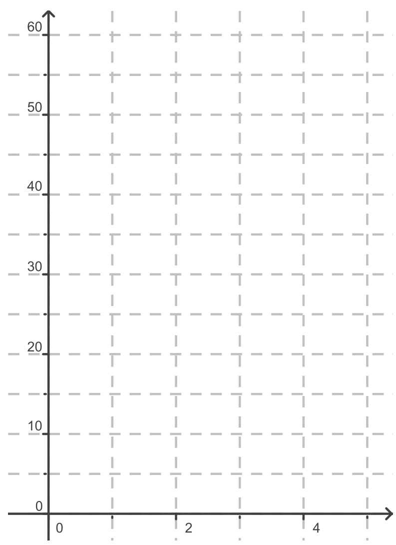
Exemple

Considérons la fonction exprimant le volume $V(x)$ d'un cube en fonction de la longueur x de l'une de ses arêtes. Représenter cette fonction de trois manières différentes :

- à l'aide d'un tableau de valeurs,

Longueur de l'arête en cm	0	1	2	3	4	5	...	x
Volume en cm^3							...	

- à l'aide d'un graphique,



- à l'aide d'une expression algébrique,

  la correspondance entre la longueur x d'une arête et le volume $V(x)$ du cube peut être formulée mathématiquement par la fonction :

On appelle *zéro* d'une fonction f l'abscisse du ou des point(s) d'intersection de son graphique avec l'axe Ox.

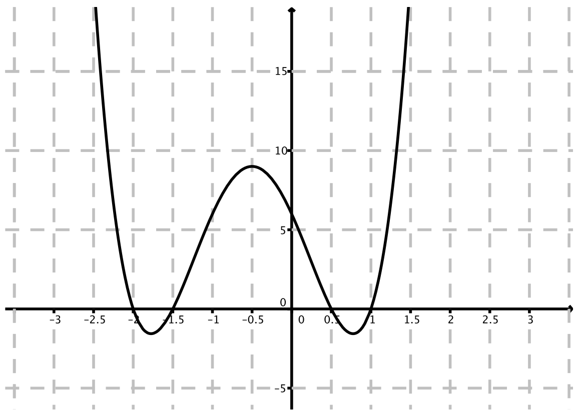
Pour le ou les calculer, on résout l'équation $f(x) = 0$.

Exemples

a) Déterminer les zéros de la fonction f définie à l'aide des valeurs ci-dessous :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	7	0	-1	-2	0	5	4

b) Déterminer graphiquement les zéros de la fonction dont le graphe est :



c) Déterminer algébriquement le(s) zéro(s) des fonctions ci-dessous :

$$f(x) = 3x - 4 \qquad g(x) = x^2 - x - 6 \qquad h(x) = x^3 + x^2$$

5.2 Définition d'une fonction affine

Le tarif d'une compagnie de taxis comprend une prise en charge d'un montant forfaitaire de CHF 5.- et une taxe kilométrique de CHF 2.-.

a) En utilisant cette compagnie de taxis, combien une personne va-t-elle payer pour effectuer le trajet Lausanne-Vevey d'une longueur de 24 km ?

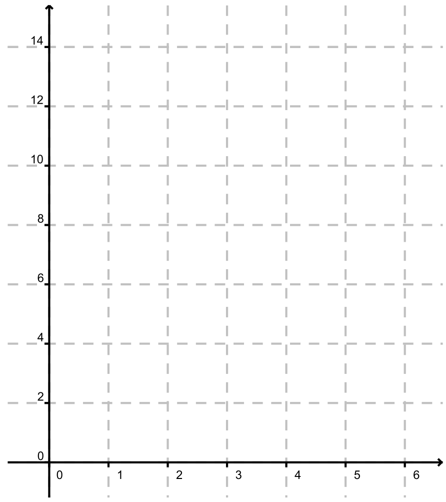
b) Combien de kilomètres peut-on parcourir avec cette compagnie de taxis avec un montant de CHF 380.- ?

Nous allons modéliser ce problème à l'aide du concept de fonction, que nous allons représenter :

- à l'aide d'un tableau de valeurs,

Nombre de km parcourus	0	1	2	3	4	5	...	x
Prix en CHF							...	

- à l'aide d'un graphique,



- à l'aide d'une expression algébrique,

  la correspondance entre le nombre de kilomètres parcourus x par le taxi et son prix $P(x)$ peut être formulée mathématiquement par la fonction :

Nous pouvons désormais répondre aux deux questions posées précédemment :

a)

b)

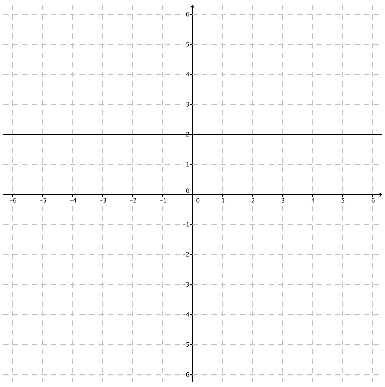
Une **fonction affine** est définie par $f(x) = mx + h$, où m et h sont des nombres réels.

Dans le cas où $m = 0$, on dit que la fonction $f(x) = h$ est une **fonction constante**.

Dans le cas où $h = 0$, on dit que la fonction $f(x) = mx$ est une **fonction linéaire**.

Exemples

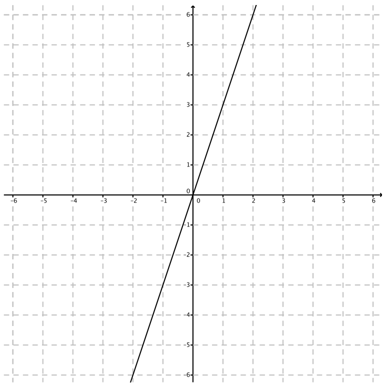
a) $f(x) = 2$



m = h =

Zéro :

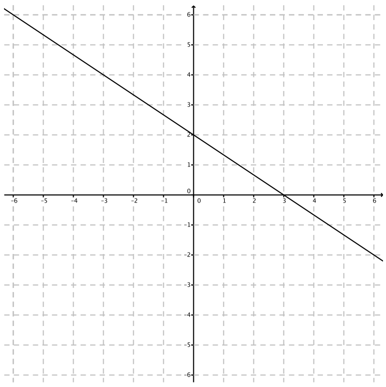
b) $f(x) = 3x$



m = h =

Zéro :

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$



m = h =

Zéro :

L'observation attentive des graphiques de l'exemple précédent nous permet d'énoncer les propriétés suivantes :

le graphe d'une fonction $f(x) = mx + h$ est une *droite*,

- de *pente* m,
- qui intercepte l'axe des y en le point $(0; h)$; le nombre h est appelé *ordonnée à l'origine*,
- qui coupe l'axe des x au plus une fois.

On peut résumer les caractéristiques des fonctions affines dans le tableau ci-dessous :

$m > 0$	$m = 0$	$m < 0$

Exemple

Représenter graphiquement :

a) $f(x) = \dfrac{3}{4}x - 3$

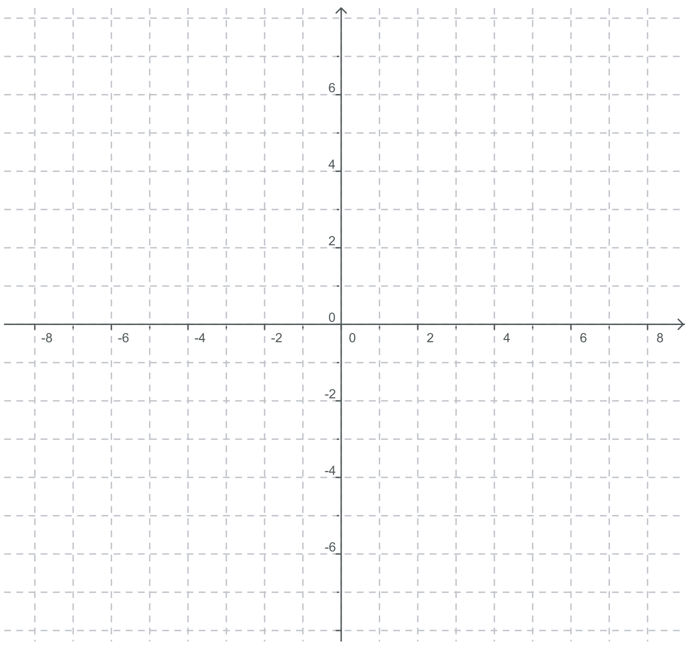
b) $y = -2x + 5$

c) $y = \dfrac{1}{3}x$

d) $g(x) = -7$

e) $x - y + 4 = 0$

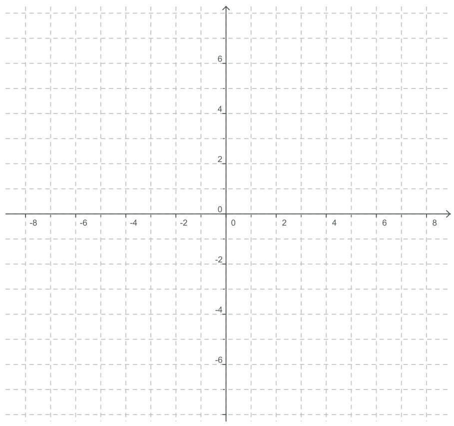
f) $x - 3y = 6$



5.3 Droite de pente donnée passant par un point donné

La détermination de l'équation $y = mx + h$ de la droite de pente m donnée passant par le point $A(x_A; y_A)$ donné revient à trouver la valeur de h. On commence par remplacer m par sa valeur, ainsi que x et y par les coordonnées du point A, puis on résout une équation du premier degré dont l'inconnue est h.

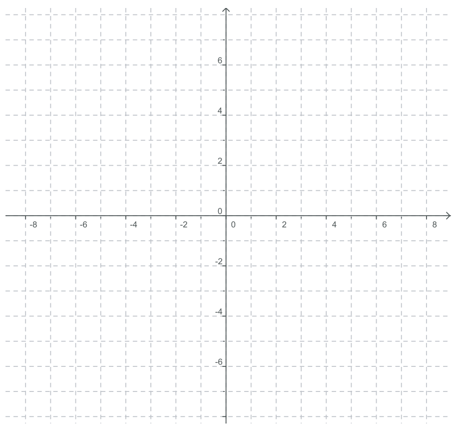
Exemple
Déterminer l'équation de la droite de pente -2 passant par le point $A(-1; 4)$. Vérifier votre résultat à l'aide d'un graphique.



5.4 Droite passant par deux points donnés

Pour déterminer l'équation $y = mx + h$ de la droite passant par les points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ donnés, on commence par déterminer sa pente $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, puis on utilise la méthode décrite au paragraphe 5.3 sachant que la droite passe par le point A ou le point B.

Exemple
Déterminer l'équation de la droite passant par les points $A(-2; -1)$ et $B(1; 5)$. Vérifier le résultat à l'aide d'un graphique.



6 Systèmes d'équations

6.1 Définition d'un système d'équations

Un **système d'équations** est un ensemble d'équations considérées simultanément. Une accolade indique que les équations forment un système.

Exemples

a) Système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

b) Système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x - 3y + 2z = -4 \\ 2x + 5y - 5z = 68 \end{cases}$$

Résoudre un système d'équations, c'est trouver l'ensemble des couples de la forme $(x; y)$ pour le cas à deux inconnues ou des triplets de la forme $(x; y; z)$ dans le cas à trois inconnues, qui vérifient toutes les équations simultanément. On note S cet ensemble de solutions.

Exemples

Parmi les différentes valeurs proposées, déterminer celles qui sont solutions des systèmes d'équations ci-dessous,

a) $(1; 0)$, $(3; 2)$, $(-4; 7)$

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$$

b) $(0; 0; 0)$, $(10; 20; 30)$, $(24; 20; 16)$

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x - 3y + 2z = -4 \\ 2x + 5y - 5z = 68 \end{cases}$$

6.2 Méthodes de résolution de systèmes d'équations

Méthode par voie graphique

La méthode par voie graphique permet de résoudre uniquement des systèmes d'équations à deux inconnues.

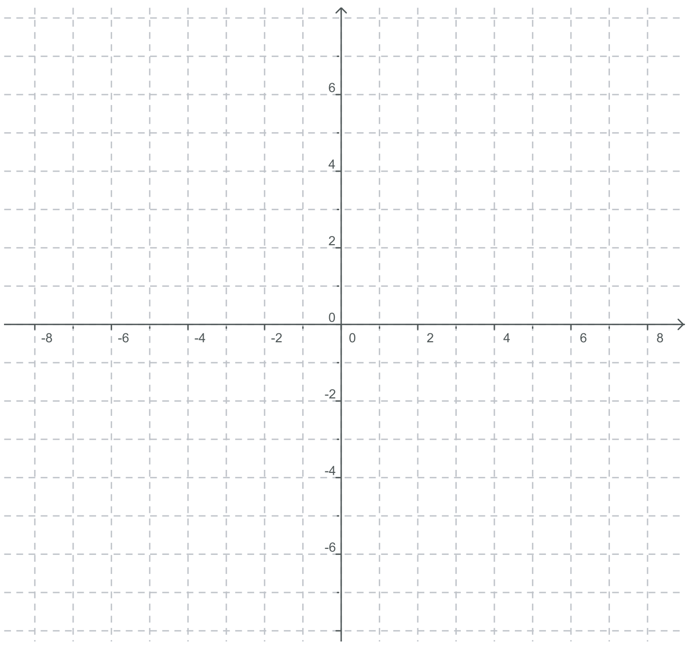
Elle consiste à tracer dans un même système d'axes les droites définies par chacune des équations du système, puis de déterminer graphiquement leur(s) point(s) d'intersection.

Trois cas de figure peuvent se présenter :

- si les droites sont *sécantes*, il y a une seule solution,
- si les droites sont *parallèles*, il n'y a pas de solution,
- si les droites sont *confondues*, il y a une infinité de solutions.

Exemple

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ à l'aide de la méthode par voie graphique.



Méthode de substitution

La méthode de substitution permet de résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues et de trois équations à trois inconnues.

Elle consiste à isoler une des inconnues d'une équation et à l'introduire dans les autres équations du système, afin d'éliminer une inconnue. On réitère le procédé jusqu'à obtenir une équation à une inconnue.

Exemples

Résoudre les systèmes d'équations à l'aide de la méthode de substitution.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = -7 \\ 3x - y = 15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 7 \\ 3y + 4z = 5 \\ 3z = 6 \end{cases}$

Méthode des combinaisons linéaires

La méthode des combinaisons linéaires permet de résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues et de trois équations à trois inconnues.

Elle consiste à multiplier les deux membres de chaque équation par des nombres réels non nuls de telle sorte que les coefficients d'une même inconnue soient opposés dans chacune des équations, puis à additionner membre à membre les deux équations ainsi obtenues. On réitère le procédé jusqu'à l'obtention d'une équation à une inconnue.

Exemples
Résoudre les systèmes d'équations à l'aide de la méthode des combinaisons linéaires.

a) $\begin{cases} 2x + 11y = 7 \\ 3x - 8y = -7 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = 60 \\ x - 3y + 2z = -4 \\ 2x + 5y - 5z = 68 \end{cases}$

6.3 Applications

Résolution de problèmes

Comme pour le cas des équations, les systèmes d'équations sont souvent utilisés dans la résolution de problèmes. La marche à suivre est identique à celle du paragraphe 3.5, à part le nombre d'inconnues et d'équations à déterminer.

Exemple
Un producteur a une exploitation de 100 hectares sur laquelle poussent des laitues et des choux. Chaque hectare de choux nécessite 600 heures de travail, et chaque hectare de laitues nécessite 400 heures de travail. Si l'on dispose de 45'000 heures et que tout le terrain et toute la main-d'oeuvre doivent être utilisés, trouver le nombre d'hectares de chaque légume qu'il faudrait planter.

Droite passant par deux points donnés

Les systèmes d'équations fournissent une autre méthode pour déterminer l'équation d'une droite $y = mx + h$ passant par deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ donnés. Plus précisément, pour trouver la pente m et l'ordonnée à l'origine h de la droite, il suffit de résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} mx_A + h = y_A \\ mx_B + h = y_B \end{cases}$$

Exemple
Déterminer l'équation de la droite passant par les points $A(-1; -2)$ et $B(2; -1)$.

7 Inéquations

7.1 Définition d'une inéquation

Une **inéquation** est une inégalité comportant des nombres et des lettres que l'on considère dans l'ensemble des nombres réels, qui peut être juste ou fausse selon les valeurs attribuées aux lettres. Son écriture se compose de trois parties : le *membre de gauche* de l'équation, le *signe d'inégalité* ($<$, $\leq$, $>$, $\geq$) et le *membre de droite* de l'équation.

Exemples

a) b)

7.2 Inéquations du premier degré

Une **inéquation du premier degré à une inconnue** est une inéquation qui peut s'écrire sous l'une des formes suivantes, où a , b sont des nombres réels et x l'inconnue :

$$ax < b \quad ax > b \quad ax \leq b \quad ax \geq b$$

Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, c'est trouver l'ensemble des nombre x , qui vérifient l'inéquation. On note S cet ensemble de solutions.

Exemples
Parmi les valeurs 3 , 4 , 5 , 6 , déterminer celles qui sont solutions de l'inéquation ci-dessous.

$$2x > 8$$

De manière générale, la plupart des inéquations ont une infinité de solutions. Pour noter leurs solutions, on utilise des intervalles de nombres réels :

Intervalles	Inéquations	Représentations graphiques
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a;b]$	$a < x \leq b$	
$[a;b[$	$a \leq x < b$	
$]a;b[$	$a < x < b$	
$[a;+\infty[$	$a \leq x$	
$]a;+\infty[$	$a < x$	
$]-\infty;b]$	$x \leq b$	
$]-\infty;b[$	$x < b$	

Exemple
Écrire sous forme d'intervalle les inégalités ci-dessous :

a) $-3 \leq x < 4$

b) $x \geq 7$

c) $1 < x < 2$

d) $x < -5$

Pour résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, on utilise généralement les quatre **principes d'équivalence** suivants :

- Premier principe d'équivalence

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en permutant le membre de gauche et le membre de droite, puis en changeant le sens de l'inégalité.

  Exemple

- Deuxième principe d'équivalence

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en additionnant ou en soustrayant à chacun des membres de l'inéquation la même expression.

  Exemple

- Troisième principe d'équivalence

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en multipliant ou en divisant chacun des membres de l'inéquation par une même expression strictement positive.

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée en multipliant ou en divisant chacun des membres de l'inéquation par une même expression strictement négative, puis en changeant le sens de l'inégalité.

  Exemples

- Quatrième principe d'équivalence

  On obtient une inéquation équivalente à une inéquation donnée si on réduit les membres de l'inéquation par les règles du calcul littéral.

  Exemple

Lorsqu'on veut résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue, il faut isoler l'inconnue dans l'un des membres de l'inéquation (gauche ou droite, c'est égal) en utilisant les principes d'équivalence.

Après avoir déterminé l'ensemble des solutions S, il est bon de vérifier s'il est correct, en remplaçant la variable par une valeur.

Exemples

a) Résoudre l'inéquation $2x + 2 > 11$.

b) Résoudre l'inéquation $2(2x + 3) < 6(x - 2) + 10$.

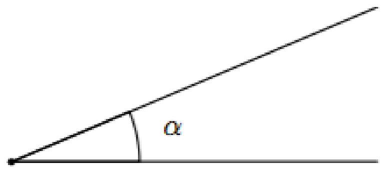
c) Résoudre l'inéquation $\dfrac{2x-3}{4}+6 \geq 2+\dfrac{4x}{3}$.

8 Trigonométrie du triangle rectangle

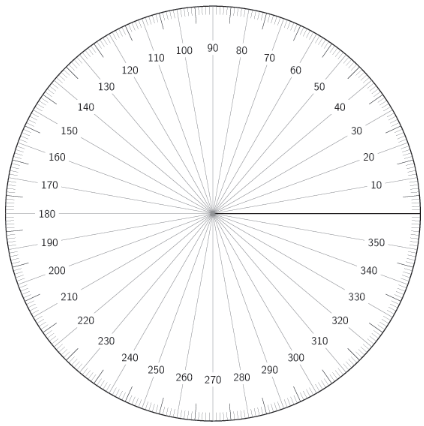
8.1 Notion d'angle

Inventée par les Grecs il y a plus de 2'000 ans, la trigonométrie est une branche des mathématiques qui s'occupe des relations entre les longueurs et les angles des triangles. Le mot trigonométrie est dérivé des trois mots grecs *tri* (trois), *gonôs* (angles) et *metron* (mesure).

On travaillera par la suite avec la notion intuitive d'**angle**, illustrée par le dessin de l'angle α ci-dessous :



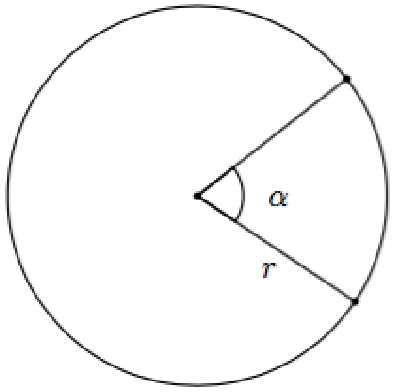
Dans l'Antiquité, pour simplifier les problèmes de partage d'angles, les Babyloniens ont décidé de diviser la circonférence du cercle en 360 parties égales, appelées **degrés**. Cette unité, notée $^\circ$, correspond à la rotation de $1/360$ tour dans le sens choisi.



La mesure d'un angle sera donnée en degrés, comme à l'accoutumée.

8.2 Arcs et secteurs circulaires

On considère dans un cercle de rayon r un angle au centre α.



La longueur L de l'arc de cercle et l'aire A du secteur circulaire sont proportionnelles à la mesure de l'angle au centre :

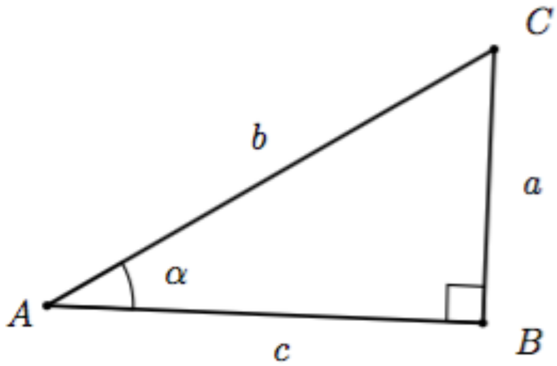
Arc de cercle	*Secteur circulaire*
$L = r\dfrac{\pi}{180}\alpha$	$A = r^2\dfrac{\pi}{360}\alpha$

Exemple

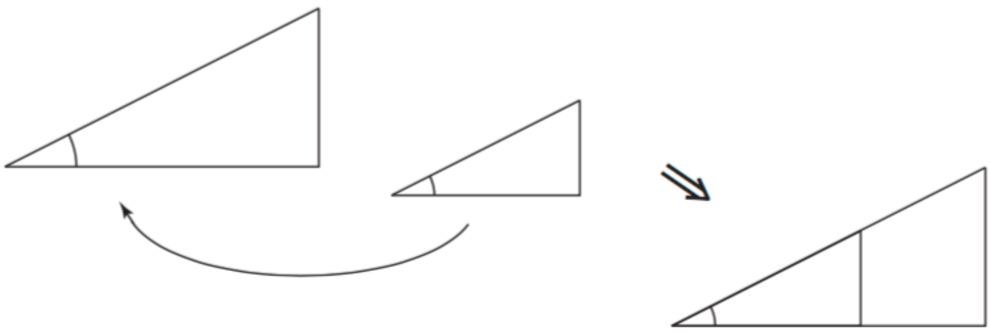
Un angle au centre θ est sous-tendu par un arc de 10 cm sur un cercle de 4 cm de rayon. Déterminer la valeur de θ, ainsi que l'aire du secteur circulaire déterminé par θ.

8.3 Le triangle rectangle

Considérons un triangle ABC rectangle, en le sommet B. L'angle α est par conséquent aigu.



Rappelons que deux triangles rectangles sont semblables lorsqu'ils ont un angle aigu égal. Les côtés correspondants sont alors proportionnels.



Nous pouvons donc définir les relations suivantes, appelées **rapports trigonométriques du triangle rectangle** :

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{c}{b} \text{ , appelé } \textbf{cosinus de } \alpha$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{b} \text{ , appelé } \textbf{sinus de } \alpha$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}} = \frac{a}{c} \text{ , appelé } \textbf{tangente de } \alpha$$

Exemples

a) Déterminer les valeurs exactes des rapports trigonométriques des angles de $30°$, $45°$ et $60°$.

Considérons un triangle équilatéral dont les côtés ont une longueur de 2. En utilisant l'un de ses axes de symétrie, on peut déduire :

$\cos(60°) =$ $\sin(60°) =$

$\tan(60°) =$

$\cos(30°) =$ $\sin(30°) =$

$\tan(30°) =$

Considérons un triangle isocèle rectangle dont les deux côtés isométriques ont une longueur de 1. On peut en déduire :

$\cos(45°) =$ $\sin(45°) =$

$\tan(45°) =$

b) Résoudre[2] le triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 7 cm et l'une de ses cathètes 4 cm.

2. *Résoudre un triangle* consiste à calculer les éléments non donnés (côtés et angles).

9 Exercices

1 Les nombres

Sauf mention expresse du contraire, les exercices de ce chapitre s'effectuent sans calculatrice.

1.1 Positionner les nombres ci-dessous dans un diagramme de Venn contenant les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

0	0,75	3	$-2,5$	$1,\bar{3}$	$\sqrt{5}$	$(-1)^2$	π	
10	$\frac{3}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	-0,00000009	$\sqrt{64}$	-30	7^3	$0,333333...$	
$\frac{4}{2}$	700	$8 \cdot 10^{10}$	0,50000...	-4	$0,21\overline{274}$	$(0,5)^{-1}$	$\frac{3}{10}$	

1.2 Combien y a-t-il de nombres différents ci-dessous ?

$\frac{1}{3}$	3	π	0,3	$\frac{22}{7}$	$\sqrt{3}^2$	$\frac{4}{8}$	$0,\bar{3}$	$\sqrt{9}$
0,5000...	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	0,3333333...	3,0000...	3,14	$\frac{6}{2}$	$0,\overline{33}$	$\frac{2\pi}{2}$

1.3 Décomposer les nombres suivants en un produit de nombres premiers :

a) 540 b) 6′600 c) 68′796 d) 2′178′000

1.4 A l'aide de votre machine à calculer, trouver :

a) trois encadrements de $\sqrt{3}$: à l'unité, au dixième et au centième.

b) une valeur approchée du quotient de 23 par 7 à 0,001 près.

c) une valeur approchée du quotient de 7 par 237 à 0,00001 près.

1.5 π et ses mystères... (avec machine à calculer)

a) Donner une valeur approchée par défaut du réel π à 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 0,0001 près.

b) Si on prend pour π la valeur $\frac{355}{113}$, combien de décimales exactes obtient-on ?

c) Pourquoi certaines personnes utilisent-elles la fraction $\frac{22}{7}$ au lieu de π ?

1.6 Calculer :

a) $3+2+6+1$ b) $-3+4-12+5$ c) $1-(-2)+7-5+(-8)$

d) $(-2+3)+(4-9)$ e) $(3-4+9)-(2+7-8)$ f) $-4-(5-(-8+2-7)+4)$

g) $4\cdot 5\cdot 2$ h) $3\cdot(-1)\cdot 2\cdot(-4)$ i) $1+2\cdot(-3)-8\div 2$

j) $43\cdot(-2)+4$ k) $4\cdot(-2+5)$ l) $-2+(-5)\cdot 4$

m) $(18-3^3)\cdot 2$ n) $(-3)^2-(5+2)^2$ o) $-3^2-6\div 3+4\cdot 2$

1.7 Écrire les nombres suivants en notation scientifique :

a) $27'100$ b) $0,234$ c) 870 d) $0,0082$ e) $630'000'000'000$ f) 8 g) $0,0000404$

1.8 Donner le code décimal de chacune des fractions :

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{20}{4}$ e) $\frac{2}{37}$ f) $\frac{51}{16}$

1.9 Donner le code fractionnaire irréductible de chacun des nombres :

a) $0,33$ b) $5,\overline{3}$ c) $1,\overline{9}$ d) $17,25$ e) $3,\overline{24}$ f) $1,78\overline{703}$

1.10 Dessiner un rectangle de 5 unités de long et 4 unités de large et représenter les fractions suivantes de sa surface :

a) $\frac{12}{20}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{30}{40}$ d) $\frac{1}{10}$ e) $\frac{1}{4}$ f) $\frac{7}{5}$

1.11 Rendre les fractions irréductibles :

a) $\frac{9}{6}$ b) $\frac{8}{4}$ c) $\frac{3}{150}$ d) $\frac{560}{910}$ e) $\frac{441}{135}$ f) $\frac{3125}{1680}$

1.12 Effectuer et exprimer le résultat sous forme de fractions irréductibles :

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{7} \cdot \frac{21}{2}$ c) $3 \cdot \frac{1}{2}$ d) $\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}$

e) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$ f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)$ g) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{8}{5}$ h) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{2}$

i) $2 \div \frac{1}{2}$ j) $\frac{3}{8} \div \frac{3}{2}$ k) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}}$ l) $\frac{3}{4} \div \left(\frac{5}{4} \div \frac{5}{8}\right)$

m) $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}} \div \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$ n) $\frac{4}{3} \div \left(\frac{4}{3}\right)^3$ o) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ p) $\frac{1}{7} - \frac{3}{2}$

q) $\frac{3}{8} + \frac{3}{16}$ r) $2 + \frac{1}{2}$ s) $\left(\frac{21}{15}\right)^2 - \frac{1}{5}$ t) $0,25 + \frac{5}{16}$

u) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ v) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 1$ w) $\left(1 - \frac{7}{15}\right) - \frac{1}{6}$ x) $1 - \left(\frac{7}{15} - \frac{1}{6}\right)$

y) $\frac{4}{5} + 2\left(1 - \frac{9}{2}\right)$ z) $1 - \frac{2}{3}\left(3 + \frac{1}{4}\right)$

1.13 Effectuer et exprimer le résultat sous forme de fractions irréductibles :

a) $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}{12}$ b) $\frac{\frac{5}{6} + \frac{3}{8}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{8}}$ c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ d) $\frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}$

e) $\frac{5}{5 - \frac{6}{7}}$ f) $\frac{1}{3} - \left(\frac{4}{6} \div \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{4}$ g) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$ h) $\frac{\frac{7}{2} + \frac{5}{3}}{\frac{7}{4} \div \frac{6}{5}}$

1.14 Coder et calculer les expressions suivantes :

a) le carré de -2, augmenté de -6 ;

b) le carré de la somme de -2 et de $\dfrac{2}{3}$;

c) la différence des carrés de 4 et de 2 ;

d) le carré de la différence entre 4 et $\dfrac{1}{2}$;

e) le produit de la somme de -7 et de 3 par la différence entre -4 et -7 ;

f) le carré de la somme de 4 et du produit de 5 par 3 ;

g) la somme du quotient de 15 par 3 et du produit de 9 par -2 ;

h) le quotient du carré de 6 par le produit de 18 par 3;

i) l'opposé du carré de 4 ;

j) le carré de l'opposé de 4 ;

k) la racine carrée de la somme de 2 et 3.

1.15 Écrire les expressions suivantes en français :

a) $(2+3)^3$ b) $2+3^3$ c) $(2+4)^{-1}$ d) $2+3^{-1}$ e) $2\cdot 3^{-1}$ f) $(2\cdot 3)^{-1}$

g) $3(2\cdot 5)$ h) $(3-1)(2\cdot 5)$ i) $3^{-1}(2\cdot 5)$ j) $\sqrt{3+2}$ k) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ l) $\sqrt{2}(\pi+3)$

1.16 Calculer à la main, puis à la machine, la valeur des expressions suivantes pour les valeurs indiquées :

a) $a-b$, si $a=0,3$ et $b=\dfrac{7}{30}$

b) $a\cdot b$, si $a=-0,66$ et $b=\dfrac{5}{12}$

c) $(a+b)^3$, si $a=-0,6$ et $b=0,\overline{3}$

d) b^2-4ac, si $a=-2$, $b=-3$ et $c=4$

e) $\sqrt{a}-b+(-c)$, si $a=\dfrac{1}{4}$, $b=-\dfrac{2}{5}$ et $c=-\dfrac{1}{3}$

f) $a^2-[(b-c)+a]-b$, si $a=-0,2$, $b=0,16$ et $c=-\dfrac{12}{25}$

g) $\dfrac{c^2}{d^3}$, si $c=-\sqrt{5}$ et $d=0,9$

2 Calcul littéral

2.1 Déterminer le degré en chaque lettre des monômes suivants, ainsi que leur degré :

a) $3x^2$ b) $17x^2yz$ c) $9abcdabcdabcd$ d) 5 e) $24u^2vw^2$

2.2 Dans chacune des lignes, un monôme n'est pas semblable aux quatre autres, déterminer l'intrus :

a) $x^2y\,,\ -7xyy\,,\ 2xy^2\,,\ 84yxy\,,\ y^2x$

b) $zx(xy)^2\,,\ -xyzyx^2\,,\ (xyz)^2x\,,\ 2x^32y^2z\,,\ 4x(-3)x(-2z)xy^2$

c) $-xy^2z\,,\ (-x)(-y^2)(-z)\,,\ -(zy)(xy)\,,\ (-xyz)^2\,,\ (15x)(15y)(15yz)$

2.3 Dans chaque ligne, additionner les monômes semblables et dans chaque colonne multiplier tous les monômes :

$2x^2y$	$-xyx$	$5yx^2$
$3a^3$	$-aaa$	$a5(-2a^2)$
uxv	$(-3)u4vx$	$uv(-2)x$

2.4 Déterminer le degré en chaque lettre des polynômes suivants, ainsi que leur degré :

a) $3xy + y^2 - 8$ b) $abc + a^2b^2 - c$ c) $2a^2b - 2ab^2 - 3c^3$ d) 5 e) $24u^2vw^2 + 6$

2.5 Déterminer l'opposé des polynômes suivants :

a) $x + 1$ b) $uy - c^2 + 33f$ c) $-x + y + 8$ d) $-(x^2 + 2x + 3)$ e) $x^3 + x^2 + x + 1$

2.6 Effectuer et réduire les expressions suivantes :

a) $(x^2 + x + 1) + (3x^2 - 8x + 7)$ b) $(x^2 + yz^3 - x) + (2x + 2yz^3)$

c) $5x - (3x^2 + 12)$ d) $(8x + 3y - z) - (5x + 3y + z)$

e) $18x - [7x - (8x - y)]$ f) $(6x + 5y) + (4x + y - 3z) - (2z + 5x - 3y)$

g) $-[(1 + x + x^2) - (2x - 4x^2)]$ h) $25x - \{13x - [24x - (5x + 3y) - (7x - y)] + (24x - 2y)\}$

2.7 Effectuer et réduire les expressions suivantes :

a) $4(x + 1)$ b) $(-x + 8)(-10)$ c) $(2x + 5)(3x - 7)$

d) $(4x - 3y)(x - 5y)$ e) $(2u + 3)(u - 4) + 4u(u + 1)$ f) $(3x + 5)^2(2x^2 + 9x - 5)$

g) $7(a^2 - 5)(3a^2 - a + 2)(a - 1)$ h) $(x - 1)(x + 2)(x + 3)$ i) $(2z + 1)^4$

2.8 Soit P et Q des polynômes. Calculer $P+Q$, $P-Q$ et $P\cdot Q$ pour les valeurs suivantes :

a) $P=2x^2+2x+4\,,\ Q=-3x^2+x-1$

b) $P=xy+2x^2-7\,,\ Q=z+2$

c) $P=a^2+2b\,,\ Q=-a+2b+1$

2.9 Réduire les expressions suivantes à l'aide des identités remarquables :

a) $(x+2)^2$ b) $(x+3)(x-3)$ c) $(2a-3b)^2$

d) $(xy+1)^2$ e) $\left(\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{2b}{3}\right)\left(\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{2b}{3}\right)$ f) $\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2$

g) $(3a^2x^3b+2ax^2b^3)^2$ h) $((x-y)(x+y))^2$ i) $(-u-3w)^2$

j) $\left(\dfrac{2a}{5}+\dfrac{b^2}{4}\right)^2$ k) $(a-b)^2-(b-a)^2$ l) $(x^3+x)^2-(x^2+1)^2$

m) $(2a-3b)(4a^2+9b^2)(2a+3b)$ n) $(a-2c)(2c+a)(a^2-4c^2)$ o) $(4z-2)^3$

2.10 Compléter les identités remarquables suivantes :

a) $(2y-...)^2=...-...+81$ b) $\left(...+\dfrac{2}{5}\right)(a-...)=...-...$ c) $(...+...)^2=...+z+\dfrac{1}{4}$

2.11 Montrer les égalités suivantes :

a) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ b) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

c) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$ d) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

2.12 Exprimer à l'aide d'une formule les périmètres, les aires et les volumes des formes figurant dans les annexes.

2.13 Les expressions suivantes sont-elles des sommes ou des produits ?

a) $5x(2x+3)$ b) $3y+9$

c) $(5z+2)^2$ d) $12x^2+8x+4$

e) $(7a+5)(6b+4)$ f) $(3f+5)(2f+6)+(2f+4)(3f+8)$

2.14 Factoriser par mise en évidence :

a) $ab + b$ b) $a^3x^2 - a^2x^3$

c) $6a^2b - 4ab$ d) $24b^3c^5 - 36bc^2$

e) $3a^3b^4 - 12a^2b^3$ f) $15a^7b^2 + 10a^5b^3$

g) $10ac^2 + 14a^2c$ h) $3a^2bc^2 - abc^3$

i) $3ab(bc)^3 - ab(bc)^2$ j) $y(b - a) - x(b - a)$

k) $(a + b)^3 - (a + b)^2$ l) $(a - b)x + (a - b)y - a + b$

m) $12x^2y^2 - 18xy^3 + 24x^3y$ n) $-44ax^3 + 286a^2x^4 - 66a^3x^5$

o) $a(b - c) - b(b - c) + c(b - c)$ p) $(2x - y)(3x + y) - 3(2x - y)$

q) $a(a + b) - b(a + b) + (a + b)^2$ r) $(x - 2)^2 - (x - 2)(x + 4) + (x + 3)(x - 2)$

2.15 Factoriser en utilisant les identités remarquables :

a) $16x^2y^6 - 25$ b) $x^2 - 9y^2$ c) $81 - x^4$

d) $49x^2 + 4y^2 - 28xy$ e) $(4y - x)^2 - (4x - y)^2$ f) $(a - b)^2 - c^2$

g) $4a^2 - 4a + 1$ h) $4x^4 + x^2y + \dfrac{y^2}{16}$ i) $a^2 - a + \dfrac{1}{4}$

j) $25x^2 - 4$ k) $9x^2 + 24x + 16$ l) $4x^2y^2 - 20xy + 25$

m) $x^6 + 2x^3 + 1$ n) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y$ o) $[2(a - 1)]^2 - a^2$

2.16 Factoriser à l'aide de la méthode du trinôme :

a) $x^2 - 8x + 12$ b) $x^2 + 5x - 14$ c) $x^2 + 20x + 19$

d) $x^2 - 4x - 32$ e) $a^2 - 4a - 12$ f) $x^4 + 3x^2 + 2$

g) $x^2 - 115x + 1'500$ h) $x^2 - 22x + 85$ i) $-y + y^2 - 12$

j) $x^2 - 8x + 7$ k) $z^2 + z - 90$ l) $x^2 - 8x + 16$

2.17 120
Factoriser :

a) $x^3 + 2x^2 + x$
b) $2x^2 - 2x - 24$
c) $3x^3 - 9x^2 - 30x$
d) $x^4 - 3x^2 + 2$
e) $a^8 - 2a^4 + 1$
f) $(10x^4 - 41)^2 - (6x^4 - 40)^2$
g) $a^8 - 256$
h) $(x-3)^2 - (x^2 - 9)$
i) $12a^2 + 36a + 27$
j) $c^4 + 7c^3 + 10c^2$
k) $xy - 9x^3y$
l) $a(a-2) + 2(a+2)(a-2)$
m) $(x+2)(3-x) + (x+2)(1+4x)$
n) $x^2 + 8x + 16$
o) $x^4z^2 - \dfrac{2x^2yz^2}{3} + \dfrac{y^2z^2}{9}$
p) $64x^3w^5 - 4x^2w^4b + 16x^2b^2w^6$
q) $8t^2 - 50$
r) $x^2 - 6x + 8$
s) $(c+5)^2 + (c+5)(2c+4)$
t) $9x^2 + 1'200x + 40'000$
u) $81x^3 + x - 18x^2$
v) $(d-6)(2-d) - (d-6)(8+7d)$
w) $16 - (3-y)^2$
x) $(u+2)^2 - (u-3)^2$

3 Equations

3.1 Résoudre les équations suivantes :

a) $5x = 20$
b) $-3u = 12$
c) $x + 4 = 6$
d) $8,3 - 3t = 2,1 + 7,2t + 6,2$
e) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{3} = \dfrac{5}{6}$
f) $5m - 4 = 5(m+7)$
g) $2(1-x) - 3(x-1) = 0$
h) $\dfrac{4x}{3} = 29,\bar{3}$
i) $5x + 1 = 5x - 1$
j) $3x - 1 = 2x - \dfrac{2-2x}{2}$
k) $\dfrac{6x}{35} - \dfrac{x+11}{5} + 3x = -23$
l) $(x-2)^2 = (x+3)^2$

3.2 Résoudre les équations suivantes par factorisation :

a) $(x-3)(x+7) = 0$
b) $d^2 - 7d = 0$
c) $6x^2 - 18x - 60 = 0$
d) $a^2 + 6a + 9 = 0$
e) $x^2 - 4x - 5 = 0$
f) $u^2 = 25$
g) $x^2 - 3x + 4 = 2$
h) $4h^2 + 12h + 8 = 0$
i) $2x^2 - 14x + 50 = x^2 + 1$
j) $32w^2 = 32w$
k) $x^2 + (x-4)^2 = 16$
l) $29t^2 - 58t = 0$

3.3 Résoudre les équations suivantes par factorisation :

a) $(x-2)(x+3)(x-4)=0$ b) $84(t-2)^3t=0$ c) $12x(x-2)+4x^2(x-2)=0$

d) $9a^4=16a^2$ e) $x^3+4x^2=-3x$ f) $(w-1)^2(w^2-1)=0$

g) $x^4-13x^2+36=0$ h) $z^8=0$ i) $12x^3-12x=0$

j) $\dfrac{l^3}{4}=\dfrac{l}{25}$ k) $x^4-4x^3=-4x^2$ l) $(x-3)x^2=x(x-3)^2$

3.4 Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $y^2-5y+4=0$ c) $2x^2-5x-2=0$

d) $z^2-4z+5=0$ e) $x^2+8x+16=0$ f) $-\dfrac{1}{2}a^2+a+6=0$

g) $x^2-7x+3=0$ h) $6t^2-t=2$ i) $u^2+4u+4=0$

j) $5x^2+13x=6$ k) $x^2+x+1=0$ l) $\dfrac{3}{2}w^2-4w-1=0$

3.5 Résoudre les équations suivantes :

a) $16x^3+9x=24x^2$ b) $25-9v^2-(3v+5)^2=0$ c) $\dfrac{1}{7}x^2+1=\dfrac{4}{7}x$

d) $x^4+x^3-x^2=6x+x^4$ e) $2x^3=50x$ f) $(16c^2-1)(81c^2+1)=0$

g) $x^4-6x^3+8x^2=0$ h) $(y^5-9y^4)(y-1)(y^2-4)=0$ i) $(x-4)^2=(2x-5)^2$

j) $x^4-9x^2=0$ k) $(x+3)(x-4)=170$ l) $(2x)^2=25x^2$

3.6 Résoudre les équations ci-dessous, par rapport à l'inconnue précisée.

a) $v=\dfrac{d}{t}$ (Vitesse) par rapport à t,

b) $E=\dfrac{1}{2}mv^2$ (Énergie cinétique) par rapport à v,

c) $t=\dfrac{i}{c}$ (Intérêt) par rapport à i,

d) $F=G\dfrac{mM}{d^2}$ (Loi de la gravitation universelle) par rapport à M,

e) $PV=nRT$ (Loi des gaz parfaits) par rapport à T,

f) $A=2\pi r(r+h)$ (Aire d'un cylindre fermé) par rapport à r,

g) $s=\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t$ (Chute libre) par rapport à v_0,

3.7 On multiplie un nombre par $2,5$; on enlève $11,3$ au résultat obtenu et on trouve $6,2$. Quel est ce nombre ?

3.8 Trouver les dimensions d'un rectangle sachant que la longueur est le triple de la largeur et que son périmètre mesure 168 m.

3.9 Une fabrique de boîtes de conserves veut faire une boîte de forme cylindrique de 20 cm de haut, contenant $3'000$ cm^3 d'aliments. Calculer le rayon de la boîte.

3.10 Julie a le tiers de l'âge de sa mère qui a elle-même la moitié de l'âge de la sienne. La somme des âges de Julie, de sa mère et de sa grand-mère est 110 ans. Quel est l'âge de Julie ?

3.11 Trouver cinq nombres naturels consécutifs tels que la somme des carrés des trois plus petits soit égale à la somme des carrés des deux autres.

3.12 Paul vient d'acheter cinq petits classeurs et trois grands classeurs. Il a payé CHF $159,50$. Sachant qu'un petit classeur coûte la moitié du prix d'un grand classeur, calculer le prix de chaque classeur.

3.13 Une fusée est lancée verticalement depuis le sol. Si la vitesse de propulsion est de 120 m/s et si la seule force agissant est la force d'attraction, la hauteur h en mètres de la fusée au-dessus du sol après t secondes est donnée par,

$$h = -4,9t^2 + 36t$$

a) A quel temps t se trouve-t-elle à 60 m de hauteur ?

b) Au bout de combien de temps retombera-t-elle au sol ?

3.14 Trois émissions se partagent les 180 minutes d'une cassette de la façon suivante : la première émission dure environ 13 minutes de moins que la seconde, qui elle-même dure 23 minutes de plus que la troisième. Trouver les durées de chaque émission.

3.15 Un notaire doit partager une somme de CHF $25'110.-$ entre trois personnes. La deuxième doit avoir les $\dfrac{3}{4}$ de la part de la première et la troisième les $\dfrac{9}{5}$ de la part de la deuxième. Calculer la part de chacune des trois personnes.

3.16 La somme de quatre nombres naturels impairs consécutifs vaut 128. Quels sont-ils ?

3.17 Un chimiste a 10 ml d'une solution qui contient une concentration d'acide à 30%. Combien de millilitres d'acide pur doit-il ajouter pour augmenter la concentration à 50% ?

3.18 L'espace occupé actuellement par une ville est un disque de 10 km de diamètre. Durant les dix dernières années, la ville s'est agrandie d'approximativement 16π km^2. En supposant que la ville était déjà circulaire, de combien s'est modifiée la distance du centre à sa périphérie ?

3.19 Un cornet à glace doit contenir 125 cm^3 de glace quand on le remplit jusqu'au fond. Le diamètre du cône est 5 cm et le sommet de la glace est un hémisphère. Calculer la hauteur h du cône.

3.20 Déterminer un nombre de deux chiffres possédant les deux propriétés suivantes :

- son chiffre des unités est inférieur de 3 à celui des dizaines,
- si on lui enlève 27, on obtient le nombre formé des mêmes chiffres écrits dans l'ordre inverse.

4 Proportionnalités

4.1 Dans chacune des situations ci-dessous, déterminer, si possible, le type de proportionnalité et compléter les tableaux en remplaçant les lettres par les nombres qui conviennent.

a) Une table de conversion de mesures de longueurs indique le passage des pouces anglais (inches) aux cm :

Longueur en inches	Longueur en cm
2	5,08
3	7,62
5	12,70
7	b_4
9	22,86
a_6	27,94

b) Tiré du tarif CFF 1978 :

Distance en km	Prix du billet en CHF
5	1,20
12	2,20
18	3,20
33	5,80
40	b_5
45	8.-

c) La tabelle suivante concerne plusieurs prismes de même volume :

Aire de la base en cm^2	Hauteur en cm
3,5	24
6,72	12,5
16	5,25
5,6	15
a_5	1,25
28	b_6

d) Le tableau suivant détermine l'aire d'un champs carré en fonction de la longueur de l'un de ses côtés :

Longueur en cm	Aire en cm^2
5	25
20	400
50	2'500
a_4	7'225
100	b_5

e) Consommation mensuelle de lait d'une famille :

Mois	Quantité en l	Prix en CHF
août	78	105,30
septembre	71	95,85
octobre	58	78,30
novembre	63	85,05
décembre	67	90,45
janvier	65	b_6
février	a_7	93,15

f) On a compté le nombre de tours qu'ont fait, dans le même temps, deux roues dentées engrenées l'une dans l'autre.

Nombre de dents de la roue	Nombre de tours
15	483
23	315
30	b_3

g) Le tableau suivant détermine le volume d'une sphère en fonction de son rayon :

Rayon en cm	Volume en cm^3
2	33,51
5	523,60
11	5'575,28
20	33'510,32
a_5	179'594,38
50	b_3

h) Pendant les vacances d'été (d'une durée de 7 semaines), Laurent a noté chaque dimanche le nombre de semaines de vacances déjà passées et le nombre de celles qui lui restent.

Nombre de semaines passées	Nombre de semaines restantes
0	7
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
a_7	1
7	b_8

4.2 Écrire les valeurs suivantes en $\%$:

$$\text{a) } 0,07 \quad \text{b) } \frac{3}{5} \quad \text{c) } 0,\bar{3} \quad \text{d) } \frac{35}{700} \quad \text{e) } 2,175 \quad \text{f) } 0,\bar{9}$$

4.3 A un examen, il y a $13'525$ candidats et $9'738$ sont reçus. Quel est le pourcentage de réussite ?

4.4 Le prix d'un appareil photo est CHF $950.-$. Un commerçant fait une réduction de 12% . Combien vend-il cet appareil ?

4.5 Un alliage contient 6% de carbone, 7% de silicium, 52% de chrome et un certain pourcentage de fer.

a) Quel est ce pourcentage ?

b) Quelle est la masse de chaque élément dans $12'500$ t d'alliage ?

4.6 Une isolation thermique permet de réduire la dépense de chauffage de $7,5\%$. Sachant que celle-ci est en moyenne de CHF $2'570.-$ par an, calculer la dépense après l'isolation.

4.7 Un minerai contient 68% de fer. Combien de tonnes de minerai seront nécessaires pour obtenir $4'500$ t de fer ?

4.8 La population d'un village a diminué de 28% en 10 ans. Il reste $2'448$ habitants. Quel était le nombre d'habitants dans ce village il y a 10 ans ?

4.9 L'ombre d'un arbre est de $4,2$ m, alors qu'au même instant, un bâton planté verticalement et qui sort de 2 m de la terre, offre une ombre de 80 cm. Déterminer la hauteur de l'arbre.

4.10 Un coupon d'étoffe de $0,75$ m vaut 12 francs. Combien vaudront $2,50$ m de cette étoffe ?

4.11 Un escargot se déplace d'environ 9 m en une journée. Quel sera alors son déplacement en 1 h ? Et en une année ?

4.12 25 pieds anglais équivalent à $7,6$ m. A quelle profondeur (en pieds) le bathyscaphe du professeur Auguste Piccard est-il descendu, s'il a atteint, d'après les journaux de l'époque, $11'521$ m ?

4.13 Le dernier livre de Laxness (écrivain islandais qui a reçu le prix Nobel en 1955) s'est vendu en Islande à plus de $10'000$ exemplaires. Résultat ordinaire dans son pays. La population islandaise est de $245'000$ habitants (deux fois celle de Lausanne pour un territoire deux fois plus grand que la Suisse...) et celle de la Suisse de $6'586'000$ habitants. A combien de ventes cela correspondrait-il en Suisse, en proportion de la population ? Est-ce vraisemblable ?

4.14 Un arc de cercle de $9,7°$ a une longueur de $0,75$ m. Combien un arc de un mètre occupe-t-il de degrés sur le cercle ?

4.15 A une certaine époque, l'achat de 100 francs français coûtait $25,80$ francs suisses. Quelle était alors, en francs suisses, la valeur d'une oeuvre d'art vendue $4'900$ francs français ?

4.16 Convertir :

a) 7'340 s = ... h ... min ... s

b) 22 km/h = ... m/s

c) 20 tour/min = ... tour/h

d) 8 g/cm^3 = ... kg/dm^3

4.17 A l'aide de la règle de trois, exprimer :

- la masse en fonction de la masse volumique et du volume,
- le volume en fonction de la masse volumique et de la masse.

4.18 Un bloc de marbre taillé en forme de parallélépipède rectangle a pour dimensions : 80 cm, 75 cm et 40 cm. Sa masse est de 6 kg. Quelle est la masse volumique de cette qualité de marbre ?

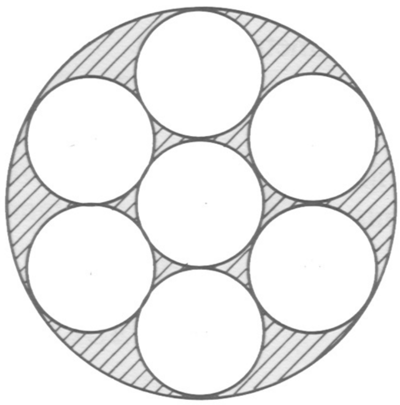
4.19 Un corps pèse $5,4$ t pour $2'000$ dm^3. En quelle matière est-il ?

4.20 Une bouteille vide a une masse de $0,75$ kg. Pleine d'eau, elle a une masse de $1,55$ kg. Quelle serait sa masse remplie d'essence dont la masse volumique est 740 kg/m^3 ?

4.21 De combien de kilos s'alourdira une boîte de conserve cylindrique de masse négligeable, de rayon 6 cm et de hauteur 20 cm, contenant onze billes de fer de rayon $1,2$ cm, si on la remplit à ras bord de glycérine ?

4.22 Un tonneau pèse 170 kg lorsqu'il est rempli de vin (masse volumique 990 kg/m^3) et 140 kg lorsqu'il est rempli d'alcool (masse volumique 790 kg/m^3). Calculer le volume du tonneau et sa tare.

4.23 Calculer la masse de la forme en cuivre ci-dessous, sachant que son épaisseur est de 2 cm, son diamètre de 12 cm et que le diamètre d'un trou est de 4 cm.



4.24 Calculer la masse volumique du liège sachant qu'un bouchon (cylindrique) mesure 5 cm de long et 2 cm de diamètre pour une masse d'environ 3 g.

4.25 Quel volume d'or faut-il pour que sa masse soit égale à celle d'une pyramide en argent à base carrée de côté 30 cm et dont la hauteur est 50 cm ?

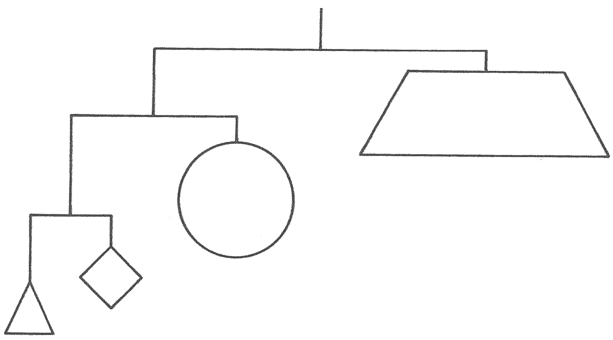
4.26 Le mobile ci-dessous est "en équilibre", et chaque figure est découpée dans une plaque de tôle homogène. Sachant que le rayon du disque est de 5 cm, calculer :

a) la base du triangle, si la hauteur est de $8,75$ cm,

b) l'aire et le périmètre du carré,

c) la hauteur du trapèze isocèle, sachant que les bases mesurent 12 cm et 16 cm,

d) la masse d'un cube de glace de côté égal à la hauteur du trapèze isocèle.



4.27 A l'aide de la règle de trois, exprimer :

- la distance parcourue en fonction de la vitesse et du temps,
- le temps en fonction de la vitesse et de la distance parcourue.

4.28 La Terre tourne sur elle-même en 24 h. Sachant que le rayon de la Terre est de $6'378$ km, calculer la vitesse en km/s d'un point situé à l'équateur.

4.29 Une voiture A parcourt une distance de 900 km en 10 h et une voiture B parcourt une distance de 90 m en 3 s. Quelle est la voiture la plus rapide ?

4.30 Combien de temps faudra-t-il à un cycliste pour parcourir une distance de $5,6 \cdot 10^2$ dam à la vitesse constante de $25,2$ km/h ?

4.31 Une voiture roule à vitesse constante. On a imprimé le tableau suivant :

Distance en km	Temps en min
32	40
10	12,5
36	45
28	34
13	16,25
16	20

Distrait, le typographe a fait une faute. Corriger l'erreur.

4.32 Luc a reçu un train électrique pour Noël. La première idée qui lui vient à l'esprit est de créer un circuit circulaire. Sachant que son train électrique effectue le tour complet en 3 min et 15 s, et que la locomotive de déplace à une vitesse constante de $0,1$ m/s, calculer le rayon du cercle formé par le circuit.

4.33 A l'aide de la règle de trois, exprimer :

- la dénivellation en fonction de la pente et de la distance horizontale,
- la distance horizontale en fonction de la pente et de la dénivellation.

4.34 Un alpiniste gravit une pente de 37% . La distance horizontale parcourue est de 250 m. Quelle est la dénivellation effectuée ?

4.35 Un escalier de 15 marches et d'une pente de 72% fait passer d'un palier à un autre. La différence des niveaux est $2,7$ m. Quelles sont les dimensions d'une marche ?

4.36 Un avion partant du sol s'élève de $8'000$ m en 5 min selon une trajectoire rectiligne. Quelle est la pente de l'ascension, sachant que la vitesse de l'avion mesurée horizontalement est de $9,6$ km/min ?

4.37 A l'aide de la règle de trois, exprimer :

- la distance sur le plan en fonction de l'échelle et de la distance réelle,
- la distance réelle en fonction de l'échelle et de la distance sur le plan.

4.38 La distance réelle entre Lyon et Valence est 100 km. Quelle est la distance entre les deux villes sur une carte géographique de la France à l'échelle $1 : 250'000$?

4.39 Une longueur de 720 km est représentée sur une carte par une longueur de $28,8$ cm. Quel est l'échelle de cette carte ?

4.40 Sur une carte géographique réduite à l'échelle $1 : 5$, un rectangle de longueur 60 cm et de largeur 50 cm représente un jardin.

a) Quelle est la surface du jardin sur la carte ?

b) Quelle est la véritable surface du jardin ?

c) Quel est le rapport entre les deux valeurs trouvées ?

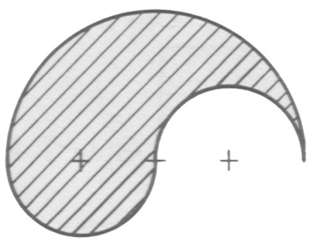
4.41 La carte d'un pays a été dressée au $1 : 25'000$. Quel espace doit occuper sur la carte un territoire de 120 km^2 ?

4.42 On a tracé la carte du Léman à l'échelle de $1 : 50'000$; l'étendue du lac est de 577 km^2 ; la feuille sur laquelle on a tracé cette carte mesure $1,5$ m de long et $0,8$ m de large. Quel est l'espace qui, sur cette feuille, est en dehors du contour du lac ?

4.43 Compléter le tableau ci-dessous (l'unité est le mètre) :

Alt. inf.	Alt. sup.	Dénivel.	Dist. carte	Echelle	Dist. horiz.	Pente
375	840		0,248	1 : 25'000		
670	682			1 : 50'000	320	
	1415	312		1 : 50'000		12%
879			0,044	1 : 50'000		5.5%
462	1995		0,0584			35%

4.44 Considérons la forme ci-dessous :



a) Dessiner la surface hachurée à l'échelle $2 : 1$,

b) Sachant que la forme hachurée a été découpée dans une plaque de fer d'épaisseur 3 cm. Quelle est la masse de la figure dessinée en a) ?

4.45 Le télécabine du Roc d'Orsay qui relie la station de Villars sur Ollon à Bretaye part d'une altitude de $1'270$ m pour aboutir à une altitude de $1'960$ m. Sur une carte au $1:25'000$, la longueur qui relie les stations de départ et d'arrivée est de 86 mm. Quelle est la longueur du câble du télécabine et sa pente moyenne ?

4.46 A l'aide de la règle de trois, exprimer :

- l'intérêt annuel en fonction du taux et du capital,
- le capital en fonction du taux et de l'intérêt annuel.

4.47 Une personne possède CHF $18'000.-$ sur un carnet d'épargne. Ce capital lui rapporte CHF $810.-$ en une année. Calculer le taux d'intérêt.

4.48 Quel est le capital qui produit CHF $480.-$ d'intérêt annuel à 3% ?

4.49 Une personne possède CHF $40'000.-$. Elle place CHF $18'000.-$ à 5%, CHF $10'000.-$ à 4% et le reste à $3,5\%$. A quel taux unique aurait-elle dû placer le tout pour avoir le même revenu annuel ?

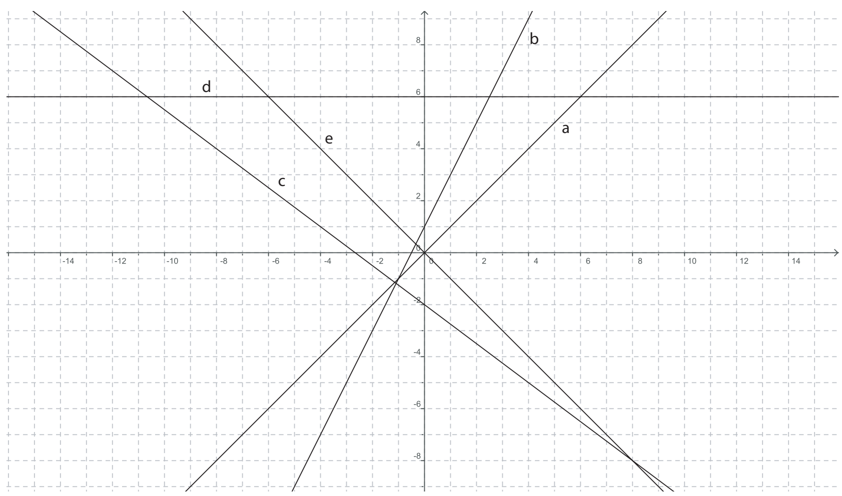
5 Fonctions affines

5.1 Pour chacun des exemples du paragraphe 4.1, déterminer la fonction associée au tableau de valeurs et tracer son graphe.

5.2 Déterminer la pente et l'ordonnée à l'origine des droites données ci-dessous et tracer leur graphe.

a) $a(x) = 2x$	b) $y = -3x$	c) $c(x) = \frac{2}{5}x$	d) $3x + 4y = 0$
e) $y = 5$	f) $f(x) = x$	g) $y = x + 3$	h) $h(x) = x + 1$
i) $x + y = 1$	j) $y = -4x - 5$	k) $k(x) = -2x + 3$	l) $x - 2y + 14 = 0$

5.3 Déterminer les équations des droites ci-dessous :



5.4 Déterminer l'équation et représenter graphiquement la droite :

a) ayant une pente de $\frac{2}{3}$ et une ordonnée à l'origine de 1,
b) passant par l'origine et de pente -3,
c) passant par le point $M(8;-3)$ et de pente $\frac{3}{4}$,
d) passant par les points $A(-3;6)$ et $B(5;-2)$,
e) passant par les points $I(-2;-4)$ et $J(2;4)$,
f) passant par le point $N(4;5)$ et parallèle à la droite d'équation $y = -2x+3$,
g) horizontale passant par le point $H(1;8)$.

5.5 Voici les tableaux de quelques valeurs de trois droites. Déterminer leurs équations :

a)

x	-2	-1	0	1	...
y	12	11	10	9	...

b)

x	10	11	12	13	...
y	50	53	56	59	...

c)

x	-5	0	...
y	27	7	...

5.6 La droite d d'équation $y = 2x+1$ passe-t-elle par le point $A(3;4)$? Si non, déterminer l'équation de la parallèle à d passant par A.

5.7 La masse présumée M (en tonnes) d'une baleine à bosse peut-être évaluée à partir de sa longueur x (en m) par : $M(x) = 5,7x - 43,1$.

a) Évaluer la masse d'une baleine à bosse de 12 m.
b) Quelle est la longueur d'une baleine de 11 t ?
c) Représenter graphiquement la fonction M.

5.8 Un enfant reçoit une jolie tirelire de sa marraine. Celle-ci y a glissé un billet de CHF $20.-$ et s'engage à compléter la somme en ajoutant CHF $5.-$ par mois aussi longtemps qu'elle le pourra.

a) Exprimer la somme accumulée S en fonction du nombre de mois écoulés x.
b) Combien y aura-t-il dans la tirelire après 15 ans et 3 mois ?
c) Au bout de combien de temps l'enfant aura-t-il gagné CHF 1'000.- ?
d) Représenter graphiquement la fonction S.

5.9 Une voiture gravit une route de pente 15%.

a) Exprimer la dénivellation d en fonction de la distance parcourue horizontalement x.
b) Quelle sera la dénivellation effectuée par la voiture, si elle a parcouru une distance horizontale de $75,2$ km ?
c) Représenter graphiquement la fonction d.

5.10 Un escargot avance à une vitesse de 100 m par jour.

a) Exprimer la distance parcourue d en fonction du nombre de jours x.

b) Quelle sera la distance parcourue par l'escargot en une année ?

c) Combien de temps faudrait-il à l'escargot pour aller de Lausanne à Vevey (24 km) ?

d) Représenter graphiquement la fonction d.

5.11 A la naissance, un bébé a une masse de $4,5$ kg. Trois ans plus tard, sa masse est de $13,5$ kg. Admettons pour simplifier que, dans l'enfance, la masse M (en kg) est liée à l'âge x (en années) par une relation affine.

a) Exprimer M en fonction de x.

b) Quelle est la masse d'un enfant de 6 ans ?

c) A quel âge l'enfant pèsera-t-il $31,5$ kg ?

d) Représenter graphiquement la fonction M.

5.12 En 1870, la température moyenne du sol à Paris était de $11,8$ $^\circ$C. Depuis lors, elle a constamment augmenté pour atteindre $13,5$ $^\circ$C en 1969.

a) Exprimer la température T (en $^\circ$C) en fonction du temps x (en années), où $x = 0$ correspond au début de l'expérience, à savoir l'année 1870.

b) Pendant quelle année la température moyenne du sol a-t-elle été de $12,5$ $^\circ$C ?

c) Selon ce modèle, quelle a été la température moyenne du sol en l'an 2'000 ?

d) Représenter graphiquement la fonction T

5.13 Il y a deux options au choix de location de voiture pour un voyage de quatre jours :

- Première option : $29,95$ \$ par jour, les 200 premiers kilomètres étant compris, et $0,25$ \$ par kilomètre supplémentaire.
- Seconde option : $39,95$ \$ par jour plus $0,15$ \$ par kilomètre.

a) Déterminer le coût d'un voyage de 500 km pour chacune des deux options.

b) Établir l'équation des coûts de chacune des deux options.

c) Pour quelle distance le coût des deux options est-il identique ?

d) A l'aide d'un graphique, déterminer en fonction du kilométrage, laquelle des deux options est préférable.

5.14 Un manufacturier de ballons de football estime qu'il lui en coûte CHF 4.- pour fabriquer chaque ballon. De plus, il a calculé qu'il lui en coûte CHF 156.- par jour de frais fixes. S'il vend ses ballons CHF 10.- chacun, calculer le seuil de rentabilité.

6 Systèmes d'équations

6.1 Déterminer si la valeur,

a) $(3;-4)$ est une solution du système $\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 5x-2y=23 \end{cases}$

b) $(4;2)$ est une solution du système $\begin{cases} x+y=24 \\ x-y=2 \end{cases}$

c) $(0;3;1)$ est une solution du système $\begin{cases} 4x+3y+z=10 \\ 2x+y-3z=0 \\ 4x-6y+5z=-18 \end{cases}$

d) $(-9;7;4)$ est une solution du système $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x-3y+5z=-17 \\ -x+2y-z=19 \end{cases}$

6.2 Résoudre les systèmes ci-dessous par voie graphique :

a) $\begin{cases} y=2x+2 \\ y=5x-7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-y=5 \\ 10x-2y=0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ y=-\dfrac{2}{3}x+1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=1-2y \\ 4x-4y=1 \end{cases}$

6.3 Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode de substitution :

a) $\begin{cases} 5x+3y=19 \\ x=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-y=4 \\ 15x-3y=14 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+5y=69 \\ y-4(x-7)=67-3x \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-3y=5 \\ 8z=8 \\ 7y-2z=11 \end{cases}$

6.4 Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode des combinaisons linéaires :

a) $\begin{cases} x+y=19 \\ 2x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5x-6y=4 \\ 3x+7y=8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x+y-4z=3 \\ -3x+4y-z=-2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x-6y-2z=-1 \\ -2x+3y+z=4 \\ 3x-y-2z=7 \end{cases}$

6.5 Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x+3y=-1 \\ 2x-y=5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 14x+9y=-20 \\ 7x-2y=55 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+5y=69 \\ 5y-3(x-1)=68 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3z-2y-x=18 \\ 2y+3z-2x=36 \\ 5x+2y-z=10 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y=10 \\ y+z=14 \\ x+z=18 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}(y+z)=127 \\ y+\dfrac{1}{2}(x+z)=134 \\ z+\dfrac{1}{2}(x+y)=147 \end{cases}$

6.6 Déterminer l'expression de la fonction affine f dont le graphe passe par les points $(-2; 4)$ et $(3; 3)$.

6.7 Les supports d'un triangle sont les droites d'équations $x + 2y - 7 = 0$, $2x + y = -4$ et $y = 2x - 4$. Déterminer graphiquement et algébriquement les coordonnées des sommets de ce triangle.

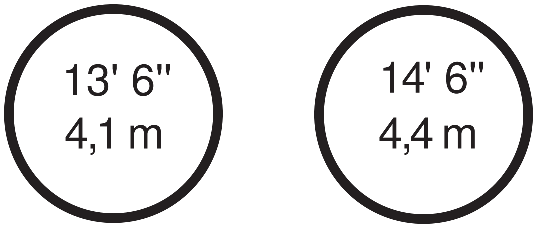
6.8 Trouver deux nombres dont la somme est 654 et la différence est 456.

6.9 Mon âge et celui de ma mère font ensemble 56 ans ; ma mère et ma grand-mère ont ensemble 110 ans ; enfin mon âge et celui de ma grand-mère font ensemble 86 ans. Quel est l'âge de chacun(e) d'entre nous ?

6.10 Comment peut-on payer la somme de CHF 137.- avec 40 pièces, les unes de CHF 2.- et les autres de CHF 5.- ?

6.11 En Écosse on voit parfois des panneaux de la circulation réglementant les hauteurs maximales autorisées des véhicules en unités anglo-saxonnes ainsi qu'en système métrique.

Un couple en vacances croise les panneaux suivants :



Déduire la valeur en mètre [m] du pied ['] ainsi que celle du pouce ["].

6.12 Pour une représentation théâtrale, il y a trois sortes de billets de couleurs différentes correspondant à des prix différents. On sait que :

- trois billets rouges et un bleu coûtent ensemble autant que trois jaunes,
- deux rouges et trois bleus coûtent ensemble CHF 70.-,
- deux bleus et deux jaunes coûtent ensemble CHF 65.-.

Quels sont les prix de ces billets ?

6.13 Le nez de Pinocchio mesure 5 cm de long au début d'une journée. Chaque fois que Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus allonge son nez de 3 cm, mais chaque fois qu'il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm. A la fin de la journée, Pinocchio a parlé dix fois pour dire soit des vérités, soit des mensonges, et son nez mesure 20 cm de long. Combien de fois Pinocchio a-t-il menti au cours de cette journée ?

6.14 Un fermier possède des poules et des lapins. Ces animaux ont ensemble cinquante têtes et cent trente pattes. Combien de poules et combien de lapins possède le fermier ?

6.15 Déterminer les coefficients a, b et c de telle manière que le système d'équation ci-dessous possède $(2;3;1)$ comme solution.

$$\begin{cases} ax + 2by + cz = -15 \\ x + by + cz = -5 \\ 9ax - by - cz = 43 \end{cases}$$

6.16 Un dessert industriel pour enfants est constitué d'une crème au chocolat (masse volumique $1'100$ kg/m^3) contenue dans un emballage de plastique (masse volumique 800 kg/m^3). La masse totale du pot est de 151 g et son volume total est de 140 cm^3.

a) Déterminer le volume de la crème et celui de l'emballage plastique.

b) Déterminer la masse de la crème et celle de l'emballage plastique.

6.17 Deux capitaux placés, le premier à 4% et le second à 5%, produisent ensemble des intérêts annuels de CHF 450.- . Si l'on avait placé le premier capital à 5% et le second à 4%, on aurait obtenu CHF 540.- . Quels sont ces deux capitaux ?

6.18 J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons 140 ans à nous deux. Trouvez mon âge.

7 Inéquations

7.1 Résoudre les inéquations suivantes :

a) $4x \leq 12$	b) $-8x > 32$	c) $50 < 5x$
d) $4 \geq x - 3$	e) $-x + 7 < 8$	f) $-4 \geq x - 6$
g) $6 - 6x < 30$	h) $5x - 8 > 9x$	i) $5x + 27 \leq 2x$
j) $9x - 2 \geq 7x + 12$	k) $8 + 2(2x + 1) < 4x - 3$	l) $\dfrac{3(5x+6)}{-4} \geq \dfrac{8-5x}{2}$

7.2 Au moment d'acheter une nouvelle grue, une entreprise de construction possède les informations suivantes sur deux modèles différents : le modèle A coûte CHF $50'000$.- à l'achat et CHF $2'000$.- par an pour l'entretien, alors que le modèle B revient à CHF $40'000$.- à l'achat et à CHF $4'000$.- pour l'entretien annuel. Déterminer après combien de temps d'utilisation le modèle A sera moins cher que le modèle B ?

7.3 Les températures sur les échelles de Fahrenheit et de Celsius sont liées par l'égalité suivante : $C = \dfrac{5}{9}(F - 32)$. Quelles sont les valeurs en degrés Fahrenheit qui correspondent aux températures comprises entre $30\ °$C et $40\ °$C ?

8 Trigonométrie du triangle rectangle

8.1 Le diamètre d'un cercle mesure 48 cm. Trouver la longueur de l'arc et la surface du secteur circulaire défini par un angle au centre de $20\,°$.

8.2 Deux points situés sur le même méridien terrestre ont des latitudes qui diffèrent de $2°$. Quelle est la distance entre ces deux points ? Rayon de la terre : $6'350$ km.

8.3 La terre effectue une rotation complète après 23 h 56 min 4 s. Calculer de combien de radians la terre tourne en une seconde.

8.4 Une roue tourne à la vitesse de 48 tours/minute. Exprimer cette vitesse angulaire en :

a) tours/seconde b) degrés/seconde

8.5 Un pneu de voiture mesure 75 cm de diamètre. A quelle vitesse angulaire en tours/minute la roue tourne-t-elle sur son axe si la voiture roule à 72 km/h ?

8.6 Un triangle rectangle ABC est rectangle en A. Résoudre ce triangle connaissant :

a) $\gamma = 32°$ et $BC = 10$ b) $\beta = 32°$ et $BC = 5$ c) $\gamma = 27°$ et $AB = 10$

d) $AC = 6$ et $AB = 10$ e) $\gamma = 64°$ et $AC = 12$ f) $\beta = 45°$ et $BC = 12$

8.7 Quelle est la hauteur d'un clocher qui a une ombre de 36 m lorsque le soleil est élevé de $37,5°$ au-dessus de l'horizon ?

8.8 Une route s'élève régulièrement en formant un angle de $2,3°$ avec l'horizontale. Quel chemin faut-il parcourir sur celle-ci pour s'élever de $109,20$ m au-dessus du niveau du point de départ ?

8.9 La voûte d'un tunnel est un arc de cercle d'angle au centre $220°$. Calculer le rayon r de cet arc de cercle pour que la largeur de la route soit de 12 m, ainsi que la hauteur maximum de la voûte au-dessus du sol.

8.10 Déterminer le périmètre et l'aire du pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $6\,\text{cm}$.

8.11 Quel est le rayon d'un cercle dans lequel une corde de $18,40$ cm sous-tend un arc de $48°$?

8.12 Debout sur mon balcon, mes yeux se trouvant à 9 m au-dessus du sol, j'observe l'immeuble d'en face. Pour voir le bas de l'immeuble, je dois baisser les yeux d'un angle de $20°$, alors que pour en voir le sommet, je dois lever les yeux d'un angle de $10°$. Quelle est la hauteur de l'immeuble d'en face ?

8.13 Une souris se trouve à 9 m d'un peuplier qu'elle aperçoit sous un angle de $58°$. Sous quel angle le verra-t-elle si elle recule de 30 m ?

8.14 Couché par terre à Ouchy, j'observe le jet d'eau de Genève. J'en vois une portion de 24 m de haut. Sachant que la distance d'Ouchy au pied du jet d'eau est de 50 km, mesurée à la surface du lac et que le rayon de la terre est de $6'350$ km, quelle est la hauteur du jet d'eau ?

8.15 Dans un triangle ABC rectangle en B, on donne $\gamma = 27°$ et $AB = 40$ cm. Calculer les longueurs BC, CH et HA, où H est le pied de la hauteur sur AC issue de B.

8.16 Considérons un cube $ABCDEFGH$ de longueur d'arête égale à 6 cm. Soit J le milieu de $[FG]$ et I le milieu de $[BC]$.

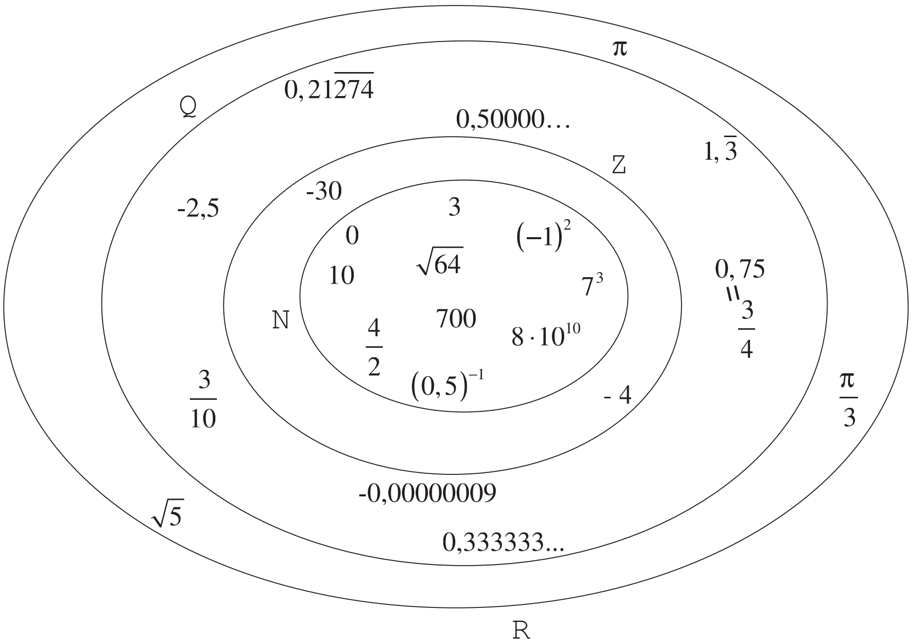
a) Calculer la mesure des angles $\widehat{JAI}$, $\widehat{JAB}$ et $\widehat{JAD}$,

b) Calculer la longueur d'une des diagonales du cube.

10 Solutions

1 Les nombres

1.1



1.2

Sept nombres différents.

1.3

a) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$; b) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11$; c) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 13$; d) $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 11^2$.

1.4

a) $1 < \sqrt{3} < 2$; $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$; $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$; b) $\sim$ 3,286 ; c) $\sim$ 0,02954.

1.5

a) $\sim$ 3,1 ; $\sim$ 3,14 ; $\sim$ 3,142 ; $\sim$ 3,1416 ; b) 6 décimales ; c) c'est une valeur approchée à 0,002.

1.6

a) 12 ; b) -6 ; c) -3 ; d) -4 ; e) 7 ; f) -26 ; g) 40 ; h) 24 ; i) -9 ; j) -82 ; k) 12 ; l) -22 ; m)-18 ; n) -40 ; o) -3.

1.7

a) $2,71 \cdot 10^4$; b) $2,34 \cdot 10^{-1}$; c) $8,7 \cdot 10^2$; d) $8,2 \cdot 10^{-3}$; e) $6,3 \cdot 10^{11}$; f) $8 \cdot 10^0$; g) $4,04 \cdot 10^{-5}$.

1.8

a) $0,5$; b) $0,875$; c) $-0,\bar{6}$; d) 5 ; e) $0,\overline{054}$; f) $3,1875$.

1.9
a) $\dfrac{33}{100}$; b) $\dfrac{16}{3}$; c) $\dfrac{2}{1}$; d) $\dfrac{69}{4}$; e) $\dfrac{107}{33}$; f) $\dfrac{193}{108}$.

1.10
-

1.11
a) $\dfrac{3}{2}$; b) 2 ; c) $\dfrac{1}{50}$; d) $\dfrac{8}{13}$; e) $\dfrac{49}{15}$; f) $\dfrac{625}{336}$.

1.12
a) $\dfrac{3}{4}$; b) 6 ; c) $\dfrac{3}{2}$; d) $\dfrac{3}{4}$; e) $-\dfrac{3}{8}$; f) $-\dfrac{1}{96}$; g) $\dfrac{1}{2}$; h) $\dfrac{1}{3}$; i) 4 ; j) $\dfrac{1}{4}$; k) $\dfrac{1}{2}$; l) $\dfrac{3}{8}$;
m) $\dfrac{28}{15}$; n) $\dfrac{9}{16}$; o) 2 ; p) $-\dfrac{19}{14}$; q) $\dfrac{9}{16}$; r) $\dfrac{5}{2}$; s) $\dfrac{44}{25}$; t) $\dfrac{9}{16}$ u) $\dfrac{3}{2}$; v) $\dfrac{7}{6}$; w) $\dfrac{11}{30}$; x) $\dfrac{7}{10}$;
y) $-\dfrac{31}{5}$; z) $-\dfrac{7}{6}$.

1.13
a) $\dfrac{1}{24}$; b) $\dfrac{29}{11}$; c) $\dfrac{28}{45}$; d) 11 ; e) $\dfrac{35}{29}$; f) $\dfrac{5}{36}$; g) $\dfrac{8}{5}$; h) $\dfrac{124}{35}$.

1.14
a) $(-2)^2+(-6)=-2$; b) $\left(-2+\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$; c) $4^2-2^2=12$; d) $\left(4-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{49}{4}$;
e) $(-7+3)(-4-(-7))=-12$; f) $(4+3\cdot 5)^2=361$; g) $15:3+9(-2)=-13$;
h) $6^2:(18\cdot 3)=\dfrac{2}{3}$; i) $-4^2=-16$; j) $(-4)^2=16$; k) $\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$.

1.15
a) le cube de la somme de 2 et 3 ; b) la somme de 2 et du cube de 3 ; c) l'inverse de la somme de 2 et 4 ; d) la somme de 2 et de l'inverse de 3 ; e) le produit de 2 et de l'inverse de 3 ; f) l'inverse du produit de 2 et 3 ; g) le triple du produit de 2 et 5 ; h) le produit de la différence de 3 et 1 avec celui du produit de 2 et 5 ; i) le produit de l'inverse de 3 avec celui du produit de 2 et 5 ; j) la racine carrée de la somme de 2 et 3 ; k) la somme des racines carrées de 2 et 3 ; l) le produit de la racine carrée de 2 avec la somme de π et 3.

1.16
a) $\dfrac{1}{15}$; b) $-\dfrac{11}{40}$; c) $-\dfrac{64}{3'375}$; d) 41 ; e) $\dfrac{37}{30}$; f) $-\dfrac{14}{25}$; g) $\dfrac{5'000}{729}$.

2 Calcul littéral

2.1
a) degré 2 en x ; degré 2 ; b) degré 2 en x, degré 1 en y et z ; degré 4 ; c) degré 3 en a, b, c et d ; degré 12 ; d) degré 0 ; e) degré 1 en v, degré 2 en u et w ; degré 5 .

2.2
a) x^2y ; b) $(xyz)^2x$; c) $(-xyz)^2$.

2.3
ligne 1 : $6x^2y$; ligne 2 : $-8a^3$; ligne 3 : $-13uvx$; colonne 1 : $6a^3uvx^3y$; colonne 2 : $-12a^3uvx^3y$; colonne 3 : $100a^3uvx^3y$.

2.4
a) degré 1 en x, degré 2 en y ; degré 2 ; b) degré 1 en c, degré 2 en a et b ; degré 4 ; c) degré 2 en a et b, degré 3 en c ; degré 3 ; d) degré 0 ; e) degré 1 en v, degré 2 en u et w ; degré 5 .

2.5
a) $-x-1$; b) $-uy+c^2-33f$; c) $x-y-8$; d) x^2+2x+3 ; e) $-x^3-x^2-x-1$.

2.6
a) $4x^2-7x+8$; b) $x^2+x+3yz^3$; c) $-3x^2+5x-12$; d) $3x-2z$; e) $19x-y$; f) $5x+9y-5z$; g) $-5x^2+x-1$; h) 0 .

2.7
a) $4x+4$; b) $10x-80$; c) $6x^2+x-35$; d) $4x^2-23xy+15y^2$; e) $6u^2-u-12$; f) $18x^4+141x^3+275x^2+75x-125$; g) $21a^5-28a^4-84a^3+126a^2-105a+70$; h) x^3+4x^2+x-6 ; i) $16z^4+32z^3+24z^2+8z+1$.

2.8

	$P+Q$	$P-Q$	$P\cdot Q$
a)	$-x^2+3x+3$	$5x^2+x+5$	$-6x^4-4x^3-12x^2+2x-4$
b)	$2x^2+xy+z-5$	$2x^2+xy-z-9$	$4x^2+2x^2z+2xy+xyz-7z-14$
c)	$a^2-a+4b+1$	a^2+a-1	$-a^3+2a^2b+a^2-2ab+4b^2+2b$

2.9
a) x^2+4x+4 ; b) x^2-9 ; c) $4a^2-12ab+9b^2$; d) $x^2y^2+2xy+1$; e) $\dfrac{a^4}{4}-\dfrac{4b^2}{9}$; f) $a^2-ab+\dfrac{b^2}{4}$; g) $9a^4b^2x^6+12a^3b^4x^5+4a^2b^6x^4$; h) $x^4-2x^2y^2+y^4$; i) $u^2+6uw+9w^2$; j) $\dfrac{4a^2}{25}+\dfrac{ab^2}{5}+\dfrac{b^4}{16}$; k) 0 ; l) $x^6+x^4-x^2-1$; m) $16a^4-81b^4$; n) $a^4-8a^2c^2+16c^4$; o) $64z^3-96z^2+48z-8$.

2.10
a) $(2y-9)^2=4y^2-36y+81$; b) $\left(a+\dfrac{2}{5}\right)\left(a-\dfrac{2}{5}\right)=a^2-\dfrac{4}{25}$; c) $\left(z+\dfrac{1}{2}\right)^2=z^2+z+\dfrac{1}{4}$.

2.11
-

2.12

-

2.13

a) produit ; b) somme ; c) produit ; d) somme ; e) produit ; f) somme.

2.14

a) $b(a+1)$; b) $a^2x^2(a-x)$; c) $2ab(3a-2)$; d) $12bc^2(2b^2c^3-3)$; e) $3a^2b^3(ab-4)$;
f) $5a^5b^2(3a^2+2b)$; g) $2ac(5c+7a)$; h) $abc^2(3a-c)$; i) $ab^3c^2(3bc-1)$; j) $(b-a)(y-x)$;
k) $(a+b)^2(a+b-1)$; l) $(a-b)(x+y-1)$; m) $6xy(2xy-3y^2+4x^2)$;
n) $22ax^3(-2+13ax-3a^2x^2)$; o) $(b-c)(a-b+c)$; p) $(2x-y)(3x+y-3)$; q) $2a(a+b)$;
r) $(x-2)(x-3)$.

2.15

a) $(4xy^3-5)(4xy^3+5)$; b) $(x-3y)(x+3y)$; c) $(3-x)(3+x)(9+x^2)$; d) $(7x-2y)^2$;
e) $15(x+y)(y-x)$; f) $(a-b+c)(a-b-c)$; g) $(2a-1)^2$; h) $(2x^2+\frac{y}{4})^2$; i) $\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2$;
j) $(5x-2)(5x+2)$; k) $(3x+4)^2$; l) $(2xy-5)^2$; m) $(x^3+1)^2$; n) $(3x^2+4y)^2$;
o) $(3a-2)(a-2)$.

2.16

a) $(x-6)(x-2)$; b) $(x+7)(x-2)$; c) $(x+19)(x+1)$; d) $(x-8)(x+4)$; e) $(a-6)(a+2)$;
f) $(x^2+1)(x^2+2)$; g) $(x-15)(x-100)$; h) $(x-17)(x-5)$; i) $(y-4)(y+3)$; j) $(x-1)(x-7)$;
k) $(z+10)(z-9)$; l) $(x-4)^2$.

2.17

a) $x(x+1)^2$; b) $2(x-4)(x+3)$; c) $3x(x-5)(x+2)$; d) $(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$;
e) $(a^2+1)^2(a+1)^2(a-1)^2$; f) $(2x-3)(2x+3)(\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)(2x^2+1)(4x^2+9)$;
g) $(a+2)(a-2)(a^2+4)(a^4+16)$; h) $-6(x-3)$; i) $3(2a+3)^2$; j) $c^2(c+2)(c+5)$;
k) $xy(1-3x)(1+3x)$; l) $(a-2)(3a+4)$; m) $(x+2)(3x+4)$; n) $(x+4)^2$; o) $z^2\left(x^2-\dfrac{y}{3}\right)^2$;
p) $4x^2w^4(16xw-b+4b^2w^2)$; q) $2(2t-5)(2t+5)$; r) $(x-4)(x-2)$; s) $3(c+5)(c+3)$;
t) $(3x+200)^2$; u) $x(9x-1)^2$; v) $-2(d-6)(4d+3)$; w) $(y+1)(7-y)$; x) $5(2u-1)$.

3 Equations

3.1

a) $S=\{4\}$; b) $S=\{-4\}$; c) $S=\{2\}$; d) $S=\{0\}$; e) $S=\{1\}$; f) $S=\emptyset$;
g) $S=\{1\}$; h) $S=\{22\}$; i) $S=\emptyset$; j) $S=\mathbb{R}$; k) $S=\{-7\}$; l) $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

3.2
a) $S=\{-7;3\}$; b) $S=\{0;7\}$; c) $S=\{-2;5\}$; d) $S=\{-3\}$; e) $S=\{-1;5\}$;
f) $S=\{-5;5\}$; g) $S=\{1;2\}$; h) $S=\{-2;-1\}$; i) $S=\{7\}$; j) $S=\{0;1\}$;
k) $S=\{0;4\}$; l) $S=\{0;2\}$.

3.3
a) $S=\{-3;2;4\}$; b) $S=\{0;2\}$; c) $S=\{-3;0;2\}$; d) $S=\left\{-\dfrac{4}{3};0;\dfrac{4}{3}\right\}$;
e) $S=\{-3;-1;0\}$; f) $S=\{-1;1\}$; g) $S=\{-3;-2;2;3\}$; h) $S=\{0\}$;
i) $S=\{-1;0;1\}$; j) $S=\left\{-\dfrac{2}{5};0;\dfrac{2}{5}\right\}$; k) $S=\{0;2\}$; l) $S=\{0;3\}$.

3.4
a) $S=\left\{-\dfrac{3}{2};2\right\}$; b) $S=\{1;4\}$; c) $S=\left\{\dfrac{5+\sqrt{41}}{4};\dfrac{5-\sqrt{41}}{4}\right\}$; d) $S=\emptyset$; e) $S=\{-4\}$;
f) $S=\{1+\sqrt{13};1-\sqrt{13}\}$; g) $S=\left\{\dfrac{7-\sqrt{37}}{2};\dfrac{7+\sqrt{37}}{2}\right\}$; h) $S=\left\{-\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right\}$;
i) $S=\{-2\}$; j) $S=\left\{-3;\dfrac{2}{5}\right\}$; k) $S=\emptyset$; l) $S=\left\{\dfrac{4-\sqrt{22}}{3};\dfrac{4+\sqrt{22}}{3}\right\}$.

3.5
a) $S=\left\{0;\dfrac{3}{4}\right\}$; b) $S=\left\{-\dfrac{5}{3};0\right\}$; c) $S=\emptyset$; d) $S=\{-2;0;3\}$; e) $S=\{-5;0;5\}$;
f) $S=\left\{-\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{4}\right\}$; g) $S=\{0;2;4\}$; h) $S=\{-2;0;1;2;9\}$; i) $S=\{1;3\}$; j) $S=\{-3;0;3\}$; k) $S=\{-13;14\}$; l) $S=\{0\}$.

3.6
a) $t=\dfrac{d}{v}$; b) $v=\sqrt{\dfrac{2E}{m}}$; c) $i=tc$; d) $M=\dfrac{Fd^2}{Gm}$; e) $T=\dfrac{PV}{nR}$; f) $r=\dfrac{-\pi h+\sqrt{\pi^2h^2+2\pi A}}{2\pi}$;
g) $v_0=\dfrac{2s-gt^2}{2t}$.

3.7
Le nombre est 7 .

3.8
Le rectangle a pour largeur 21 m et pour longueur 63 m.

3.9
Le rayon du cylindre est $\sim 6,91$ cm.

3.10
Julie a 11 ans.

3.11
Les nombres sont 10, 11, 12, 13 et 14.

3.12
Un petit classeur coûte CHF 14.50 et un grand classeur coûte CHF $29.-$.

3.13
a) La fusée se trouve à 60 m du sol après $\sim 2,56$ s et $\sim 4,79$ s ; b) la fusée retombe sur le sol après $\sim 7,35$ s.

3.14
La première émission dure 59 min, la deuxième 1 h 12 min et la troisième 49 min.

3.15
La première personne reçoit CHF $8'100.-$, la deuxième CHF $6'075.-$ et la troisième CHF $10'935.-$.

3.16
Les nombres sont 29, 31, 33 et 35.

3.17
Il faut ajouter 4 ml d'acide.

3.18
Le rayon s'est agrandi de 2 km.

3.19
Le hauteur du cône est de $\sim 14,10$ cm.

3.20
Tous ceux qui satisfont à l'une des deux propriétés satisfont également à l'autre : 30, 41, 52, 63, 74, 85 et 96.

4 Proportionnalités

4.1
a) proportionnel, $b_4 = 17,78$, $a_6 = 11$; b) -; c) inversement proportionnel, $a_5 = 67,2$, $b_6 = 3$; d) proportionnel au carré, $a_4 = 85$, $b_5 = 10'000$; e) proportionnel, $b_6 = 87,75$, $a_7 = 69$; f) inversement proportionnel, $b_3 = 241,5$; g) proportionnel au cube, $b_5 = 35$, $a_6 = 523'598,78$; h) -; $a_7 = 6$, $b_8 = 0$.

4.2
a) 7% ; b) 60% ; c) $33,\bar{3}\%$; d) 5% ; e) $217,5\%$; f) 100%.

4.3
Il y a 72% de réussite.

4.4
L'appareil photo coûte CHF $836.-$.

4.5
a) L'alliage contient 35% de fer ; b) la masse du carbone est de 750 t, celle du silicium est de 875 t, celle du chrome est de $6'500$ t et celle du fer est de $4'375$ t.

4.6
Après l'isolation, la dépense est de CHF $2'377.25$.

4.7
Il faut $\sim 6'618$ t de minerai.

4.8
Il y avait $3'400$ habitants.

4.9
La hauteur de l'arbre est $10,5$ m.

4.10
Cela coûtera CHF $40.-$.

4.11
Il se déplacera de $37,5$ cm en une heure et de $\sim 3,29$ km en une année.

4.12
Le bathyscaphe est descendu à $\sim 37'898$ pieds.

4.13
Il y a $268'816$ livres vendus : cela représente 4% de la population.

4.14
Il occupe $\sim 12,9°$.

4.15
L'oeuvre d'art coûtait CHF $1'264,20$.

4.16
a) 2 h 2 min 20 s ; b) $6,\bar{1}$ m/s ; c) 1'200 tour/h ; d) 8 kg/dm ^{3}.

4.17
-

4.18
La masse volumique de cette qualité de marbre est de 25 kg/m ^{3}.

4.19
Il est en aluminium.

4.20
Remplie d'essence, la bouteille pèserait $1,342$ kg.

4.21
La boîte s'alourdira de $\sim 2,75$ kg.

4.22
Son volume est de $0,15 \text{ m}^3$ et sa tare vaut $21,5$ kg.

4.23
La forme pèse $\sim 0,45$ kg.

4.24
La masse volumique du liège est de $\sim 190 \text{ kg/m}^3$.

4.25
Il faut $\sim 8,33 \text{ dm}^3$ d'or.

4.26
a) La base du triangle mesure $\sim 8,98$ cm ; b) l'aire du carré est $\sim 39,27 \text{ cm}^2$ et son périmètre est $\sim 25,07$ cm ; c) la hauteur du trapèze mesure $\sim 11,22$ cm ; d) la masse du cube de glace est de $\sim 1,30$ kg.

4.27
-

4.28
La vitesse est de $\sim 0,46$ km/s.

4.29
La voiture B est la plus rapide.

4.30
Il lui faudra 13 min 20 s.

4.31
Il faut remplacer 28 par $27,2$ ou 34 par 35.

4.32
Le rayon du cercle mesure $\sim 3,1$ m.

4.33
-

4.34
La dénivellation est de $92,5$ m.

4.35
Chaque marche à une profondeur de 25 cm et une hauteur de 18 cm.

4.36
La pente vaut $16,67\%$.

4.37
-

4.38
La distance est de 4 dm.

4.39
L'échelle est $1 : 2'500'000$.

4.40
a) Aire du jardin sur la carte : $0,3$ m^2 ; b) aire réelle du jardin : $7,5$ m^2 ; c) le rapport est $5^2 = 25$.

4.41
Le territoire occupe $1'920$ cm^2.

4.42
L'espace en dehors du contour du lac est de $0,969$ m^2.

4.43

Alt. inf.	Alt. sup.	Dénivel.	Dist. carte	Échelle	Dist. horiz.	Pente
375	840	465	0,248	1 : 25'000	6200	$7,5\%$
670	682	12	0,0064	1 : 50'000	320	$3,75\%$
1103	1415	312	0,052	1 : 50'000	2600	12%
879	1000	121	0,044	1 : 50'000	2200	$5,5\%$
462	1995	1533	0,0584	1 : 75'000	4380	35%

4.44
a) Les longueurs sont doublées ; b) elle pèse $\sim 592,63$ g.

4.45
Le câble mesure $\sim 2,258$ km et sa pente est de $\sim 32,09\%$.

4.46
-

4.47
Le taux d'intérêt est de $4,5\%$.

4.48
Le capital est de CHF $16'000.-$.

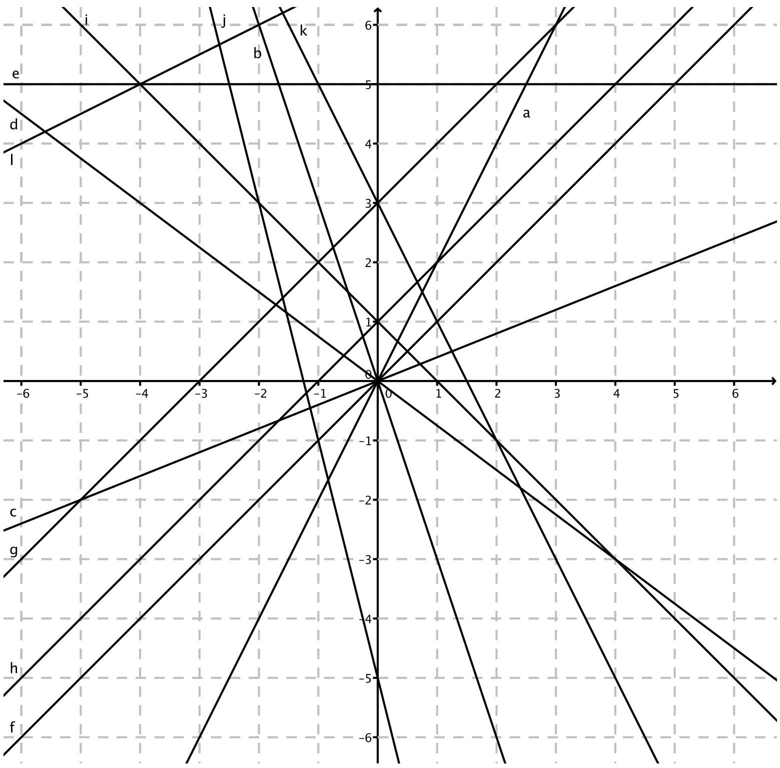
4.49
Le taux serait de $4,3\%$.

5 Fonctions affines

5.1
a) $y = 3x$; b) $y = \dfrac{240}{x}$; c) $y = 5x^2$; d) $-$.

5.2

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
Pente	2	-3	$\frac{2}{5}$	$-\frac{3}{4}$	0	1	1	1	-1	-4	-2	$\frac{1}{2}$
Ordonnée à l'origine	0	0	0	0	5	0	3	1	1	-5	3	7



5.3
a) $y = x$; b) $y = 2x + 1$; c) $y = -\dfrac{3}{4}x - 2$; d) $y = 6$; e) $y = -x$.

5.4
a) $y = \dfrac{2}{3}x + 1$; b) $y = -3x$; c) $y = \dfrac{3}{4}x - 9$; d) $y = -x + 3$; e) $y = 2x$; f) $y = -2x + 13$; g) $y = 8$.

5.5
a) $y = -x + 10$; b) $y = 3x + 20$; c) $y = -4x + 7$.

5.6
La droite d ne passe pas par le point A . La parallèle à d passant par A est $y = 2x - 2$.

5.7
a) $25,3$ t ; b) $\sim 9,49$ m ; c) -.

5.8
a) $S(x) = 5x + 20$; b) CHF 935.- ; c) 16 ans et 4 mois ; d) -.

5.9
a) $d(x) = 0,15x$; b) $11,28$ km ; c) -.

5.10
a) $d(x) = 100x$; b) $36,5$ km ; c) 240 jours ; d) -.

5.11
a) $M(x) = 3x + 4,5$; b) $22,5$ kg ; c) 9 ans ; d) -.

5.12
a) $T(x) = 0,0\overline{17}x + 11,8$; b) en 1910 ; c) $\sim 14,03$ $°C$; d) -.

5.13
a) Offre 1 : $194,80$ \$ et offre 2 : $234,80$ \$; b) offre 1 : $C_1(x) = \begin{cases} 119,8 & \text{, si } x \leq 200 \\ 69,8 + 0,25x & \text{, si } x > 200 \end{cases}$ et offre 2 : $C_2(x) = 159,8 + 0,15x$; c) 900 km ; d) l'offre 1 jusqu'à 900 km, puis l'offre 2 à partir de 900 km.

5.14
26 ballons.

6 Systèmes d'équations

6.1
a) oui ; b) non ; c) non ; d) non.

6.2
a) $S=\{(3;8)\}$; b) $S=\emptyset$; c) $S=\{(x;y)|2x+3y=3\}$; d) $S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)\right\}$.

6.3
a) $S=\{(2;3)\}$; b) $S=\emptyset$; c) $S=\{(-18;21)\}$; d) $S=\left\{\left(\frac{37}{14};\frac{13}{7};1\right)\right\}$.

6.4
a) $S=\{(7;12)\}$; b) $S=\left\{\left(\frac{76}{53};\frac{28}{53}\right)\right\}$; c) $S=\{(4;3;2)\}$; d) $S=\emptyset$.

6.5
a) $S=\{(2;-1)\}$; b) $S=\{(5;-10)\}$; c) $S=\left\{\left(\frac{4}{5};\frac{337}{25}\right)\right\}$; d) $S=\{(2;5;10)\}$;
e) $S=\{(7;3;11)\}$; f) $S=\{(50;64;90)\}$.

6.6
$f(x)=-\frac{1}{5}x+\frac{18}{5}$.

6.7
Les sommets du triangle sont $A(0;-4)$, $B(3;2)$ et $C(-5;6)$.

6.8
Les nombres sont 99 et 555.

6.9
J'ai 16 ans, ma mère a 40 ans et ma grand-mère a 70 ans.

6.10
Il y a 21 pièces de CHF 2.- et 19 pièces de CHF 5.-.

6.11
1' $=$ $0,3$ m et 1" $=$ $0,0\bar{3}$ m.

6.12
Un billet rouge coûte CHF 12,50, un billet bleu coûte CHF 15.- et un billet jaune coûte CHF 17,50.

6.13
Pinocchio a dit 7 mensonges.

6.14
Il y a 35 poules et 15 lapins.

6.15
$a=2$, $b=-4$ et $c=5$.

6.16
a) Les volumes de la crème et de l'emballage plastique sont de $130\ \text{cm}^3$ et $10\ \text{cm}^3$; b) les masses de la crème et de l'emballage plastique sont de $143\ \text{g}$ et $8\ \text{g}$.

6.17
Les capitaux ont une valeur de CHF $10'000.-$ et CHF $1'000.-$.

6.18
Votre âge est de 40 ans et le mien est de 60 ans.

7 Inéquations

7.1
a) $]-\infty;3]$; b) $]-\infty;-4[$; c) $]10;+\infty[$; d) $]-\infty;7]$; e) $]-1;+\infty[$; f) $]-\infty;2]$; g) $]-4;+\infty[$; h) $]-\infty;-2[$; i) $]-\infty;-9]$; j) $[7;+\infty[$; k) $\emptyset$; l) $\left]-\infty;-\frac{34}{5}\right]$.

7.2
Après 5 ans.

7.3
Entre $86\ ^\circ\text{F}$ et $104\ ^\circ\text{F}$.

8 Trigonométrie du triangle rectangle

8.1
$L \cong 8,38$ cm et $A \cong 100,53\ \text{cm}^2$.

8.2
La distance entre les points A et B est d'environ $221,66$ km.

8.3
En une seconde, la Terre tourne d'environ $7,29 \cdot 10^{-5}$ radians.

8.4
a) $\frac{4}{5}$ tours/seconde ; b) 288°/seconde.

8.5
509,30 tours/minutes.

8.6
a) $\beta = 58^\circ$, $AC \cong 8,48$, $AB \cong 5,30$; b) $\gamma = 58^\circ$, $AC \cong 2,65$, $AB \cong 4,24$; c) $\beta = 63^\circ$, $BC \cong 22,03$, $AC \cong 19,63$; d) $\beta \cong 30,96^\circ$, $\gamma \cong 59,04$, $BC \cong 11,66$; e) $\beta = 26^\circ$, $BC \cong 27,37$, $AB \cong 24,60$; f) $\gamma = 45^\circ$, $AC \cong 8,49$, $AB \cong 8,49$.

8.7
Le clocher mesure $\sim 27,62$ m.

8.8
Il faut parcourir $2'721,03$ m.

8.9
Le rayon mesure ~ 6.39 m et la hauteur de la voûte est de $\sim 8,57$ m.

8.10
Le périmètre mesure $35,27$ cm et l'aire est de $85,6$ cm^2.

8.11
Le rayon est de $\sim 22,62$ cm.

8.12
La hauteur du bâtiment est de $\sim 13,36$ m.

8.13
Elle le voit sous un angle de $\sim 20,27°$.

8.14
La hauteur du jet d'eau est ~ 221 m.

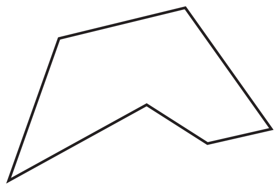
8.15
$BC \cong 78,50$ cm, $CH \cong 69,95$ cm, $HA \cong 18,16$ cm.

8.16
a) $\widehat{JAI} \cong 41,81°$, $\widehat{JAB} \cong 48,19°$, $\widehat{JAD} \cong 70,53°$; b) $\sim 10,39$ cm.

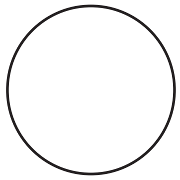
11 Annexes

Les pages suivantes donnent les formules permettant de calculer les périmètres, aires et volumes des formes les plus utilisées.

Périmètres

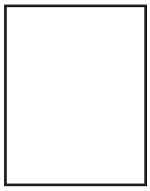


Périmètre d'un polygone
somme des longueurs des côtés

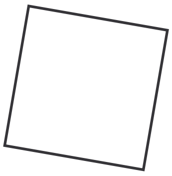


Périmètre du disque
double du rayon · π

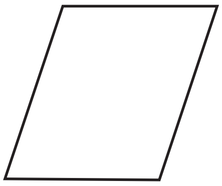
Aires



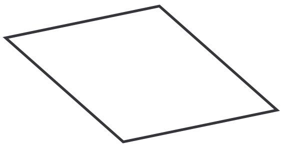
Aire du rectangle
longueur · largeur



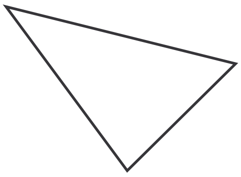
Aire du carré
carré du côté



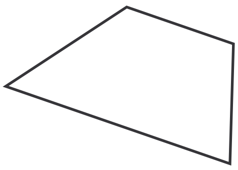
Aire du parallélogramme
côté · hauteur correspondante



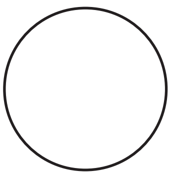
Aire du losange
petite diagonale · moitié de la grande diagonale



Aire du triangle
côté · moitié de la hauteur correspondante

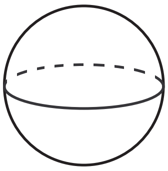


Aire du trapèze
somme des bases · moitié de la hauteur

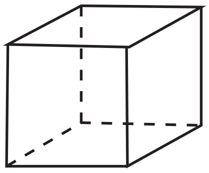


Aire du disque
carré du rayon · π

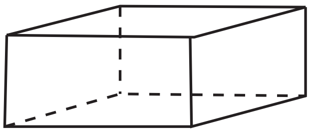
Volumes



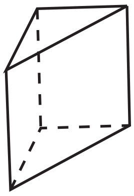
Volume de la sphère
quatre tiers · π · cube du rayon



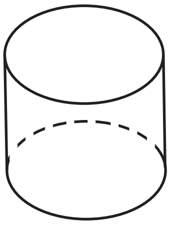
Volume du cube
cube du côté



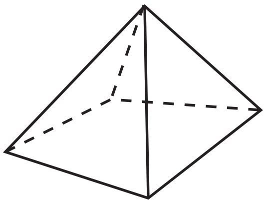
Volume du parallélépipède rectangle
longueur · largeur · hauteur



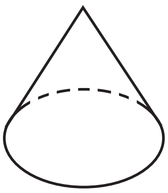
Volume du prisme
aire de la base · hauteur



Volume du cylindre
aire de la base · hauteur



Volume de la pyramide
aire de la base · tiers de la hauteur



Volume du cône
aire de la base · tiers de la hauteur

Références

[1] Earl W. SWOKOWSKI & Jeffery A. COLE. *Algèbre*. LEP, 1998.

[2] Gerard CHARRIERE. *L'algèbre mode d'emploi*. Fournitures et éditions scolaires du canton de Vaud, 1995.

[3] Commission romande de mathématiques. *CALCUL NUMERIQUE EXERCICES*. Editions du Tricorne, 1980.

[4] Commission romande de mathématiques. *FUNDAMENTUM de mathématique : ALGEBRE*. Editions du Tricorne, 1986.

[5] Commission romande de mathématiques. *FUNDAMENTUM de mathématique : ELEMENTS DE TRIGONOMETRIE*. Editions du Tricorne, 1990.

[6] Commission romande de mathématiques. *FUNDAMENTUM de mathématique : NOTIONS ELEMENTAIRES*. Editions du Tricorne, 2005.

[7] Sylviane PAHUD. *Géométrie expérimentale I, II et III*. Editions du Tricorne, 1989.

[8] Cours et exercices de *Monsieur Hubert Bovet* du gymnase de Beaulieu.

[9] Cours et exercices de *Messieurs Jean-Pierre Marville, Marco Nicollerat* du gymnase du Bugnon.

[10] Cours et exercices de *Madame Sandrine Ostermann Burnier* du gymnase de Chamblandes.

[11] Cours et exercices de *Monsieur Jean-Philippe Javet* du gymnase de Morges.

[12] Cours et exercices de *Monsieur Didier Müller* du lycée de Porrentruy.