Gymnase de Morges

Formulaire de mathématiques

Ecole de Culture générale

Ecole de Maturité

www.formulairemath.c.la

Ensembles

Ensembles de nombres

$\mathbb{N}$	$=$	$\{0;1;2;\ldots\}$	entiers naturels
$\mathbb{Z}$	$=$	$\{\ldots;-2;-1;0;1;2;\ldots\}$	entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	$=$	$\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x = \frac{m}{n} \text{ avec } m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$	nombres rationnels
$\mathbb{R}$	$=$	$\left\{\ldots;-\frac{2}{3};\ldots;\sqrt{2};\ldots;\pi;\ldots;8;\ldots\right\}$	nombres réels
$\mathbb{N}^*$	$=$	$\{n \in \mathbb{N} \mid n \neq 0\}$, de même $\mathbb{Z}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{Q}^*$	
$\mathbb{R}_+$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, de même $\mathbb{Z}_+, \mathbb{Q}_+$	
$\mathbb{Q}_-$	$=$	$\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\}$, de même $\mathbb{Z}_-, \mathbb{R}_-$	

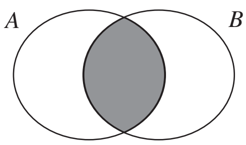
Intervalles dans l'ensemble des nombres réels pour $a < b$

$]a;b[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$[a;b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
$]a;b]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$[a;b[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
$]a;+\infty[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$	$[a;+\infty[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
$]-\infty;a[$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	$]-\infty;a]$	$=$	$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$

Opérations

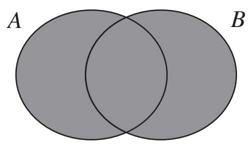
Intersection

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$



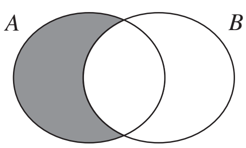
Réunion

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$



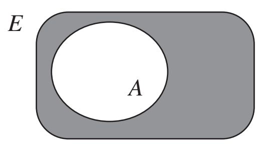
Différence

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$



Complémentaire

$\complement_E A = \overline{A} = \{x \mid x \in E \text{ et } x \notin A\}$



Combinatoire

◇ *Nombre d'arrangements simples*

$$\boxed{A_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

(Nombre de mots de k lettres distinctes prises dans un alphabet de n lettres, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$)

◇ *Nombre d'arrangements avec répétition*

$$\boxed{\overline{A_k^n} = n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k}$$

(Nombre de mots de k lettres non nécessairement distinctes prises dans un alphabet de n lettres)

◇ *Nombre de permutations simples de n éléments*

$$\boxed{P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

(Nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres distinctes)

◇ *Nombre de permutations de n éléments avec répétitions*

$$\boxed{\overline{P_n}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}}$$

(Nombre d'anagrammes d'un mot de n lettres dont $n_1, n_2, \ldots, n_k$ se répètent)

◇ *Nombre de combinaisons simples*

$$\boxed{C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}}$$

(Nombre de sous-ensembles à k éléments d'un ensemble à n éléments, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$)

◇ *Binôme de Newton*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n}$$

◇ *Triangle de Pascal*

0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\ldots$

Probabilités

◇ *Fonction de probabilité*

Soient A et B des événements contenus dans un univers U et P une fonction de probabilité.

$0 \leq P(A) \leq 1$	$P(U) = 1$	$P(\emptyset) = 0$
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	$A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$	
$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$		
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		

◇ *Equiprobabilité*

Si les événements élémentaires sont équiprobables et si A et U comportent respectivement p et m éléments, alors :

$$P(A) = \frac{p}{m} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

◇ *Probabilité conditionnelle*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(B) \neq 0$$

◇ *Evénements indépendants*

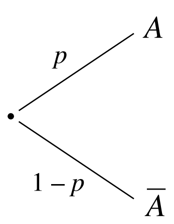
$$\begin{aligned} A \text{ et } B \text{ indépendants} \quad &\Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \\ &\Leftrightarrow \quad P(A|B) = P(A) \end{aligned}$$

◇ *Evénements incompatibles*

Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

$$A \cap B = \emptyset \quad \Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

◇ *Processus binomial (épreuve de Bernoulli)*



Probabilité d'obtenir exactement k fois A en n épreuves indépendantes :

$$C_k^n \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Calcul algébrique

Identités remarquables

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2+2AB+B^2\\(A-B)^2 &= A^2-2AB+B^2\\(A+B)^3 &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\\(A-B)^3 &= A^3-3A^2B+3AB^2-B^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A^2-B^2 &= (A+B)(A-B)\\A^3+B^3 &= (A+B)(A^2-AB+B^2)\\A^3-B^3 &= (A-B)(A^2+AB+B^2)\end{aligned}$$

Exponentielles et logarithmes

Puissances

$a,b\in\mathbb{R}_+^*\quad r,s\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}a^ra^s &= a^{r+s}\\(a^r)^s &= a^{rs}\\a^rb^r &= (ab)^r\\\frac{a^r}{b^r} &= \left(\frac{a}{b}\right)^r\\a^0 &= 1\\a^{-r} &= \frac{1}{a^r}\\\frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s}\end{aligned}$$

Racines

$a,b\in\mathbb{R}_+^*\quad p\in\mathbb{Z}\quad m,n\in\mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a}\\a^{\frac{p}{n}} &= \sqrt[n]{a^p}\\\sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}\\\sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\\\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\\(\sqrt[n]{a})^p &= \sqrt[n]{a^p}=\sqrt[mn]{a^{mp}}\end{aligned}$$

Logarithmes

$a,b,u,v\in\mathbb{R}_+^*\quad a,b\neq 1\quad x,r\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}a^x=u &\Leftrightarrow x=\log_a(u)\\\log_a(a^x) &= x\\a^{\log_a(u)} &= u\\\log_a(1) &= 0\\\log_a(a) &= 1\\\log_a(u\cdot v) &= \log_a(u)+\log_a(v)\\\log_a\left(\frac{1}{u}\right) &= -\log_a(u)\\\log_a\left(\frac{u}{v}\right) &= \log_a(u)-\log_a(v)\\\log_a(u^r) &= r\log_a(u)\\\log_a(u) &= \frac{\log_b(u)}{\log_b(a)}=\frac{\ln(u)}{\ln(a)}\end{aligned}$$

Nombre d'Euler e

$e\cong 2,7182818\ldots$

Logarithmes particuliers

$$\begin{aligned}10^x=u &\Leftrightarrow x=\log_{10}(u)=\log(u)\\e^x=u &\Leftrightarrow x=\log_e(u)=\ln(u)\end{aligned}$$

Quelques sommes

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+4+5+\ldots+n &= \frac{n(n+1)}{2}\\\sum_{k=1}^{n}k^2=1+4+9+16+\ldots+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\\sum_{k=1}^{n}k^3=1+8+27+64+\ldots+n^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Equations et polynômes

◇ *Degré 2*

Equations du deuxième degré :

Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$

Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a aucune solution dans les réels

Factorisation du trinôme du deuxième degré :

Si $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Si $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Si $\Delta < 0$: le trinôme ne se factorise pas

$$P(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Signe du trinôme du deuxième degré : $P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(x)$ a le signe de a sauf entre les zéros éventuels

◇ *Degré n*

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $\quad (a_i \in \mathbb{Z}$ et $a_n \neq 0)$

Pour résoudre l'équation $P(x) = 0$, on utilise les propriétés suivantes :

- les zéros entiers de $P(x)$ sont à chercher parmi les diviseurs de a_0
- $P(x)$ est divisible par $(x - a)$ $\Leftrightarrow$ $P(a) = 0$

Théorème du reste

Le reste de la division de $P(x)$ par $(x - a)$ est égal à $P(a)$

Analyse

Parité

◇ *Fonction paire*

Une fonction f est dite paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in ED(f)$

La représentation graphique de f est alors symétrique par rapport à l'axe des y.

◇ *Fonction impaire*

Une fonction f est dite impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in ED(f)$

La représentation graphique de f est alors symétrique par rapport à l'origine.

Limites

◇ *Limites de fonctions rationnelles*

Il y a trois cas :

1. Si $g(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)}$
2. Si $g(a) = 0$ et $f(a) \neq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \text{“}\infty\text{”}$
3. Si $g(a) = f(a) = 0$, on se ramène à l'un des deux cas précédents en simplifiant par $x - a$

◇ *Limites à l'infini de fonctions rationnelles*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \text{“}\infty\text{”} & \text{si } n > m \end{cases}$$

◇ *Limites de fonctions exponentielles et logarithmiques*

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

si $k > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^k} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} |x|^k e^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^k} = 0 \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} x^k \ln(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Asymptotes

◇ *Asymptote verticale*

La droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale
$\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \text{“}\infty\text{”}$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \text{“}\infty\text{”}$

◇ *Asymptote horizontale*

La droite d'équation $y = b$ est asymptote horizontale à droite
$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$

De même à gauche ($x \to -\infty$)

◇ *Asymptote oblique*

La droite d'équation $y = mx + h$ est asymptote oblique à droite si $f(x) = mx + h + \delta(x)$ où $\lim\limits_{x \to +\infty} \delta(x) = 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = h$$

De même à gauche ($x \to -\infty$)

◇ *Asymptote dans le cas des fonctions rationnelles*

Soit n le degré du numérateur, m le degré du dénominateur.
On distingue les cas :

si $n \leqslant m$	asymptote horizontale
si $n = m + 1$	asymptote oblique

Remarque : le quotient de la division euclidienne du numérateur par son dénominateur permet de déterminer l'éventuelle asymptote oblique.

Plan d'étude d'une fonction

1. $ED(f)$
2. Parité éventuelle
3. Zéros et signe de f
4. Asymptotes
5. Dérivée
6. Zéros et signe de f', croissance et extremums
7. Graphe de f

Dérivées

◇ *Dérivée d'une fonction en un point a de ED(f)*

$$\text{Si } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ existe, on la note } f'(a)$$

◇ *Equation de la tangente au graphe de f en (a; f(a))*

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$ $\quad$ $f'(a)$ est la pente de cette tangente

◇ *Propriétés*

f et g sont des fonctions dérivables, $n \in \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{R}$

$(f+g)' = f' + g'$	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$	$(g^n)' = n \cdot g^{n-1} \cdot g'$	$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$	$(\sqrt{g})' = \frac{g'}{2\sqrt{g}}$

◇ *Croissance d'une fonction dérivable*

$f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a; b[$	$\Rightarrow$	f est strictement croissante sur $]a; b[$
$f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a; b[$	$\Rightarrow$	f est constante sur $]a; b[$
$f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a; b[$	$\Rightarrow$	f est strictement décroissante sur $]a; b[$

◇ *Quelques dérivées*

$k \in \mathbb{R}, a > 0$

$f(x)$	$f'(x)$
k	0
x	1
x^k	kx^{k-1}
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

$f(x)$	$f'(x)$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$e^{g(x)}$	$e^{g(x)} \cdot g'(x)$
$\ln(g(x))$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$

Intégrales

◇ *Primitive d'une fonction f sur un intervalle I*

F est une *primitive* de f sur $I \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Les autres primitives de f sur I sont $F + c$ où c est constante.

◇ *Quelques primitives*

F est une primitive de f.

fonction	*primitive*
k	kx
x^k	$\frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} \quad k \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$x \cdot \ln(x) - x$

fonction	*primitive*
$f(g(x)) \cdot g'(x)$	$F(g(x))$
$f(ax+b)$	$\frac{1}{a}F(ax+b)$
$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln\lvert g(x)\rvert$
$e^{g(x)} \cdot g'(x)$	$e^{g(x)}$
$g^n(x) \cdot g'(x)$	$\frac{g^{n+1}(x)}{n+1} \quad n \neq -1$

◇ *Intégrale de f entre a et b*

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est l'une des primitives de f sur $[a;b]$

◇ *Propriétés*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$
$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a;b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

◇ *Applications*

Aire *algébrique* du domaine borné limité par le graphe de f et les droites d'équation $y = 0$, $x = a$ et $x = b$: $\int_a^b f(x)dx$

Volume du solide engendré par la révolution (autour de la droite d'équation $y = 0$) du domaine limité par le graphe de f et les droites d'équation $y = 0$, $x = a$ et $x = b$: $\pi \int_a^b f^2(x)dx$

Pour vos annotations

Pour vos annotations

Trigonométrie

Conversion des mesures d'angle

Soit r la mesure d'un angle en *radians* et d la mesure de cet angle en *degrés*.

◇ *Conversion de degrés en radians*

$$\boxed{r = \frac{\pi}{180}d}$$

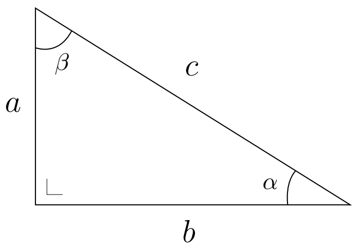
Conversion de radians en degrés

$$\boxed{d = \frac{180}{\pi}r}$$

Triangle rectangle

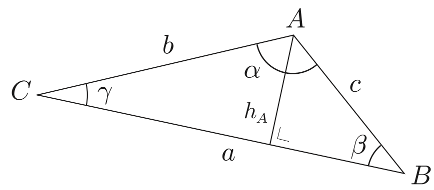
◇ *Sinus, cosinus, tangente*

$$\boxed{\begin{array}{lcccl} \sin(\alpha) & = & \dfrac{a}{c} & = & \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) & = & \dfrac{b}{c} & = & \sin(\beta) \\ \tan(\alpha) & = & \dfrac{a}{b} & & \end{array}}$$



Triangle quelconque

α, β, γ sont les angles d'un triangle ABC, a, b, c les côtés opposés aux sommets A, B et C, r le rayon du cercle circonscrit, h_A la hauteur issue de A.



◇ *Théorèmes*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$ *théorème du cosinus*

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} = 2r$$ *théorème du sinus*

$$\frac{1}{2}ah_A = \frac{1}{2}ab\sin(\gamma) = \frac{1}{2}ac\sin(\beta) = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$$ *aire du triangle*

Valeurs exactes des fonctions trigonométriques de quelques arcs

x radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x degrés	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—

Relations trigonométriques

◇ *Relations entre les fonctions trigonométriques d'un même arc*

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$1 + \tan^2(\alpha) = \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

◇ *Relations entre les fonctions trigonométriques de certains arcs*

$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \dfrac{1}{\tan(\alpha)}$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\dfrac{1}{\tan(\alpha)}$
$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

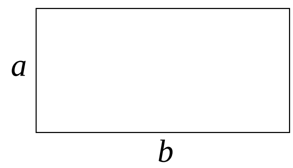
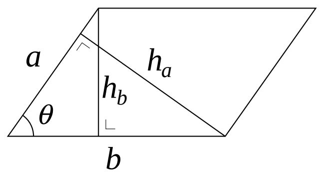
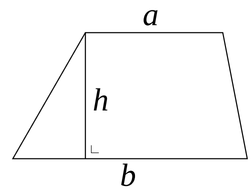
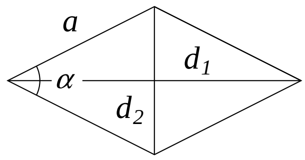
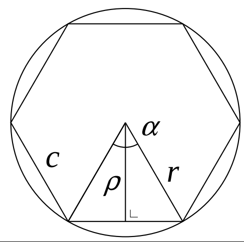
◇ *Somme de deux arcs, différence de deux arcs*

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$
$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$	$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

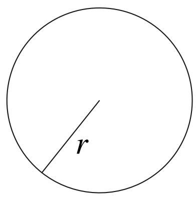
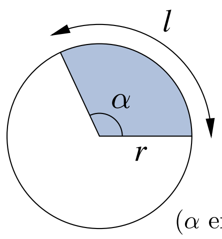
◇ *Arc double et demi-arc*

$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$	$\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos(\alpha)}{2}$
$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$	$\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos(\alpha)}{2}$
$\tan(2\alpha) = \dfrac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$	$\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Aire $\mathcal{A}$ de certains polygones

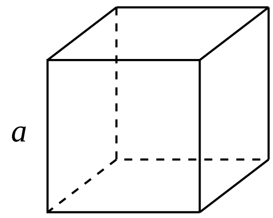
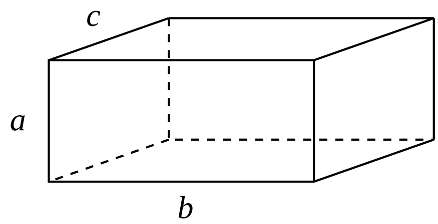
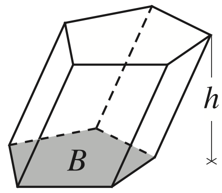
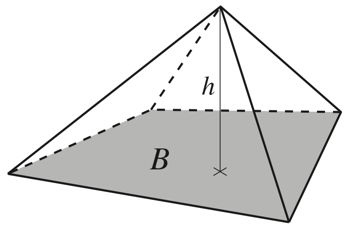
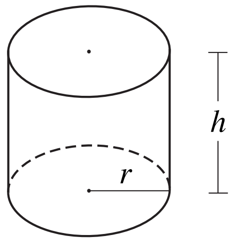
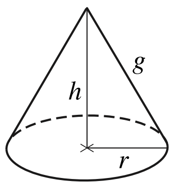
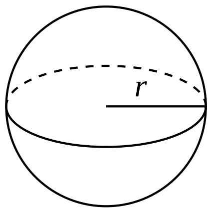
Rectangle	$\mathcal{A} = ab$	
Parallélogramme	$\mathcal{A} = ah_a = bh_b = ab\sin\theta$	
Trapèze	$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(a+b)h$	
Losange	$\mathcal{A} = \frac{1}{2}d_1 d_2 = a^2 \sin\alpha$	
Polygone régulier à n côtés	$\mathcal{A} = \frac{1}{2}nc\rho = \frac{1}{2}nr^2 \sin\alpha$	

Cercle et disque

Cercle Disque	Périmètre $= 2\pi r$ Aire $= \pi r^2$	
Arc de cercle Secteur circulaire	$l = r\alpha$ Aire $= \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r^2\alpha$	 (α en radians)

Aire $\mathcal{A}$ et Volume $\mathcal{V}$ de certains solides

B désigne l'aire de la base.

Cube	$\mathcal{A} = 6a^2$ $\mathcal{V} = a^3$	
Parallélipipède rectangle	$\mathcal{A} = 2(ab + ac + bc)$ $\mathcal{V} = abc$	
Prisme	$\mathcal{V} = Bh$	
Pyramide	$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}Bh$	
Cylindre droit	$\mathcal{A} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ $\mathcal{V} = \pi r^2 h$	
Cône droit	$\mathcal{A} = \pi r^2 + \pi rg$ $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$	
Sphère	$\mathcal{A} = 4\pi r^2$ $\mathcal{V} = \dfrac{4}{3}\pi r^3$	

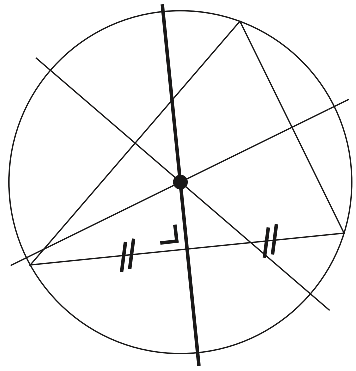
Géométrie

Les lignes principales du triangle

◇ *Médiatrices*

Une médiatrice est la perpendiculaire à un côté passant par son milieu.

Les médiatrices se coupent en un point qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.

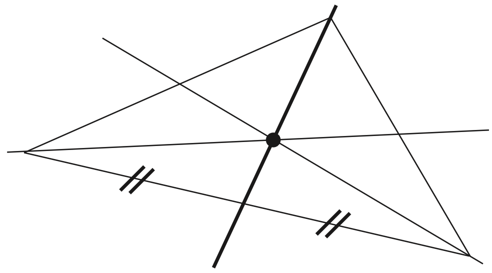


◇ *Médianes*

Une médiane est la droite qui passe par un sommet et le milieu du côté opposé.

Les médianes se coupent au centre de gravité (ou barycentre) du triangle.

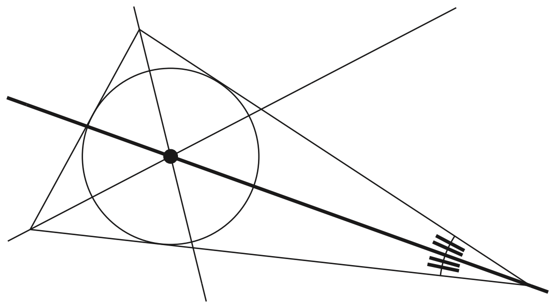
Le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane, à partir du sommet.



◇ *Bissectrices*

Une bissectrice divise un angle en deux parties égales.

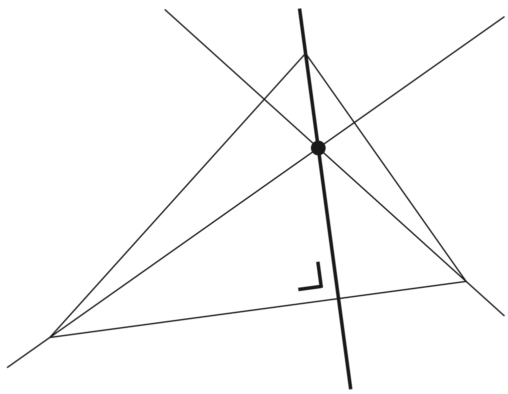
Les bissectrices intérieures se coupent en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.



◇ *Hauteurs*

Une hauteur est la perpendiculaire à un côté passant par le sommet opposé.

Les hauteurs se coupent en un point appelé orthocentre du triangle.



Géométrie analytique

On note $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ un repère du plan. Le point O est l'*origine du repère*, le couple $(\vec{e}_1; \vec{e}_2)$ est la *base associée* au repère.
Le signe ⦹ indique qu'une relation n'est valable que lorsque les vecteurs sont exprimés dans un repère *orthonormé* (c'est-à-dire lorsque les vecteurs de base sont perpendiculaires entre eux et de longueur 1).

Les formules ci-dessous sont facilement adaptables dans V_3.

◇ *Composantes d'un vecteur et opérations*

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \qquad k\vec{a} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

⦹ *Produit scalaire de deux vecteurs*

Le *produit scalaire* de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est $\vec{a} \bullet \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

⦹ *Propriétés du produit scalaire*

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} \qquad (k\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (k\vec{b}) = k(\vec{a} \bullet \vec{b}) \qquad \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ ou $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$

⦹ *Norme d'un vecteur*

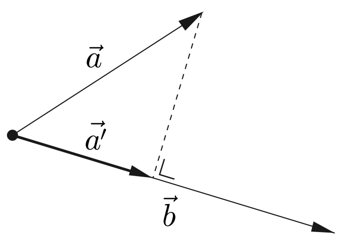
La *norme* (ou longueur) de $\vec{a}$ est $\|\vec{a}\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$

⦹ *Propriété de la norme*

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \bullet \vec{a}} \qquad \|k\vec{a}\| = |k| \, \|\vec{a}\| \qquad \|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

⦹ *Projection orthogonale $\vec{a'}$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$*

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b} \qquad \|\vec{a'}\| = \frac{|\vec{a} \bullet \vec{b}|}{\|\vec{b}\|} \qquad \vec{a'} \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet \vec{b}$$



⦹ *Angle γ entre deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$*

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|}$$

◇ *Vecteurs colinéaires ($\vec{a} \neq \vec{0}$)*

$$\begin{array}{lll} \vec{a} \text{ et } \vec{b} \text{ sont } \textit{colinéaires} & \Leftrightarrow & \text{l'un est un multiple de l'autre} \\ & \Leftrightarrow & \text{il existe } k \in \mathbb{R} \text{ avec } \vec{b} = k\vec{a} \\ & \Leftrightarrow & a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0 \end{array}$$

⦹ *Aire σ du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$*

$$\sigma = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

⦹ *Aire σ du triangle construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$*

$$\sigma = \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

◇ *Coordonnées d'un point*

$$\boxed{A(a_1;a_2) \;\Leftrightarrow\; \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}$$

◇ *Vecteur défini par 2 points*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}}$$

◇ *Milieu d'un segment*

$$\boxed{M \text{ est le milieu de } AB \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \Leftrightarrow M\left(\frac{a_1+b_1}{2};\frac{a_2+b_2}{2}\right)}$$

◇ *Barycentre ou centre de gravité du triangle*

G est le barycentre (ou centre de gravité) du triangle ABC :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) \;\Leftrightarrow\; G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3};\frac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$$

⊕ *Longueur du segment AB où $A(a_1;a_2)$ et $B(b_1;b_2)$*

$$\boxed{\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}}$$

◇ *Equations vectorielles et paramétriques de la droite*

$P(x;y)$ est sur la droite passant par $A(a_1;a_2)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{d}$

$\Leftrightarrow$ il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = a_1 + kd_1 \\ y = a_2 + kd_2 \end{cases}$

⊕ *Equations cartésiennes de la droite*

d est une droite donnée par sa *pente* m et son *ordonnée à l'origine* h :
$P(x;y) \in d \quad \Leftrightarrow \quad y = mx + h$

d est une droite donnée par un point A et sa *pente* m :
$P(x;y) \in d \quad \Leftrightarrow \quad y - a_2 = m(x - a_1)$

Si la droite d est donnée par $ax + by + c = 0$, alors :

- sa pente vaut $m = -\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$

- un vecteur directeur est $\vec{d} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$

- un vecteur normal est $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

♁ *Angle aigu γ entre deux droites d et g de vecteurs directeurs $\vec{d}$ et $\vec{g}$*

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{\left|\vec{d} \bullet \vec{g}\right|}{\|\vec{d}\| \; \|\vec{g}\|}} \qquad \boxed{\gamma = 90° \;\Leftrightarrow\; \vec{d} \bullet \vec{g} = 0}$$

♁ *Angle aigu γ entre deux droites de pente m_1 et m_2*

$$\boxed{\tan\gamma = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|} \qquad \boxed{\gamma = 90° \;\Leftrightarrow\; m_1 \cdot m_2 = \text{-}1}$$

♁ *Distance δ du point $P(p_1; p_2)$ à la droite d d'équation $ax + by + c = 0$*

$$\boxed{\delta(P; d) = \frac{|ap_1 + bp_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

♁ *Bissectrices*

Les droites d et d' sont données par leurs équations cartésiennes $d : ax + by + c = 0$ et $d' : a'x + b'y + c' = 0$.

$P(x; y)$ appartient à l'une des deux bissectrices des droites d et d'

$\Leftrightarrow \;\; \delta(P; d) = \delta(P; d')$

$$\Leftrightarrow \;\; \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y + c'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

♁ *Cercle*

On note γ le cercle de centre $C(c_1; c_2)$ et de rayon r.

$$\boxed{P(x; y) \in \gamma \;\Leftrightarrow\; (x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2}$$

♁ *Tangente à un cercle*

La droite t est tangente au cercle γ $\Leftrightarrow$ $\delta(C; t) = r$

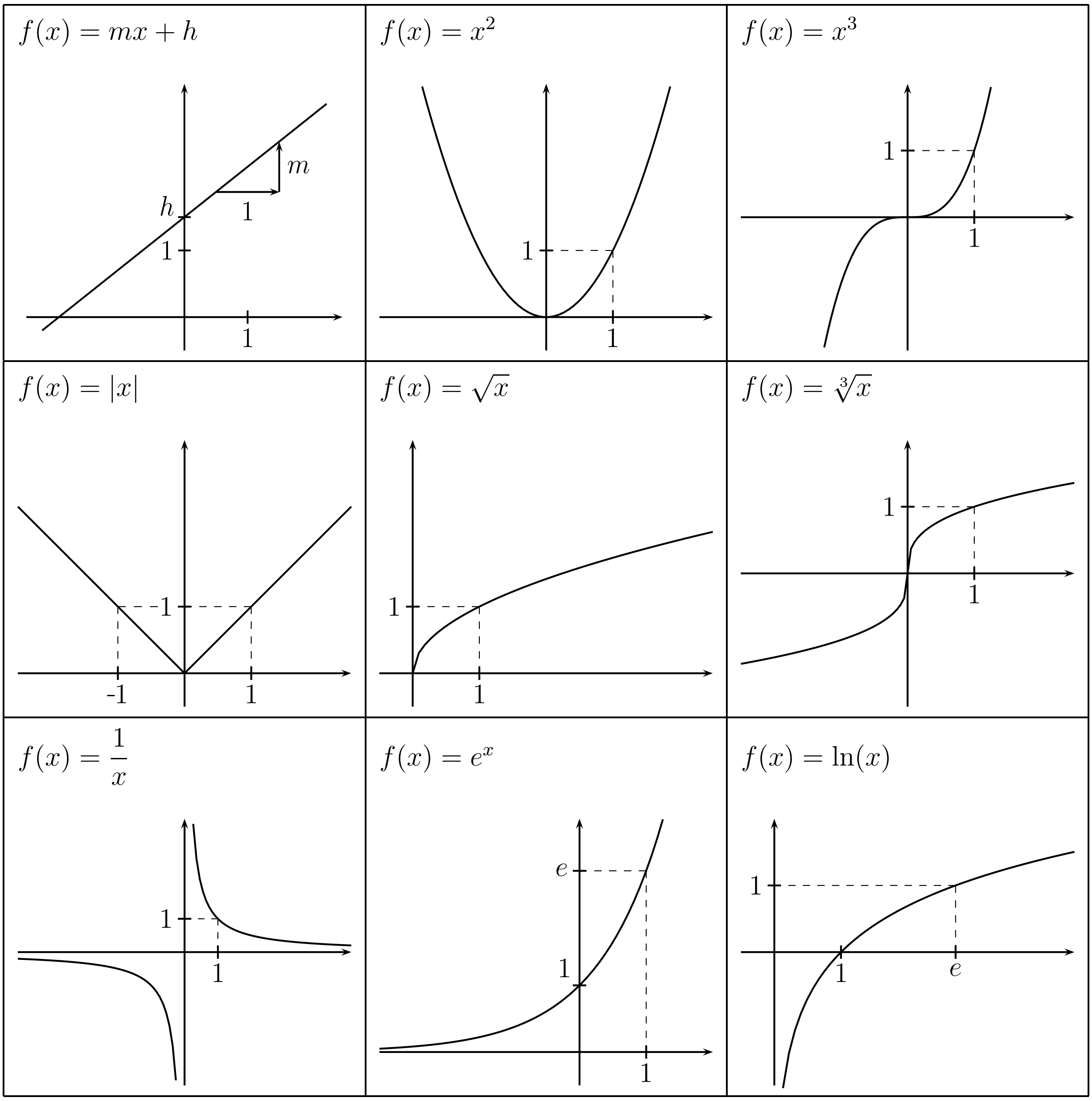
Equations des tangentes de pente m au cercle γ

$y - c_2 = m(x - c_1) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

$P(x; y)$ est sur la tangente au cercle γ en $T(t_1; t_2) \in \gamma$

$\Leftrightarrow \;\; (t_1 - c_1)(x - c_1) + (t_2 - c_2)(y - c_2) = r^2$

Quelques représentations graphiques



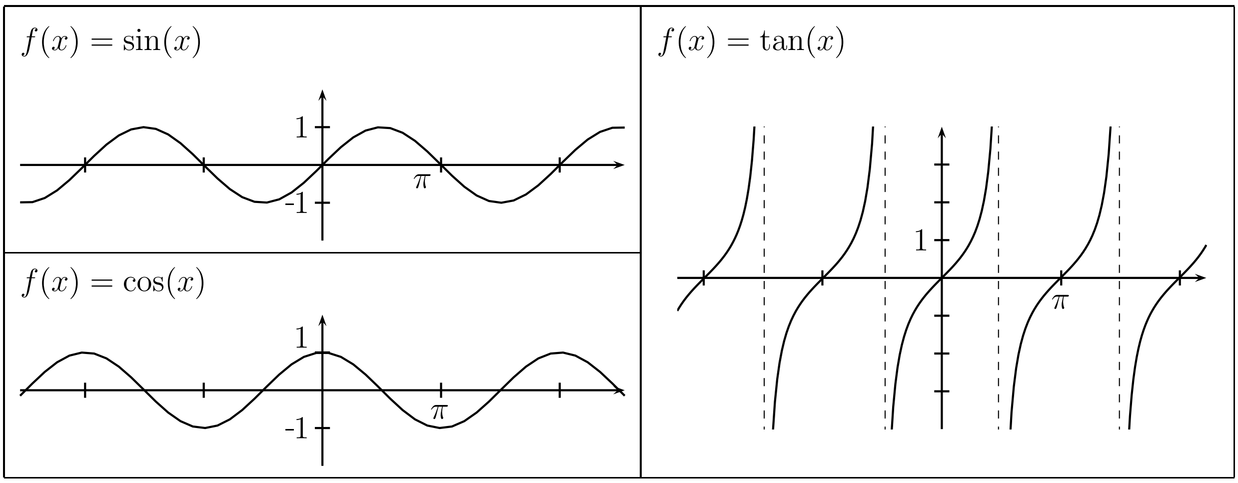


Table des matières

Ensembles **3**
Ensembles de nombres . . . 3
Intervalles dans l'ensemble des nombres réels pour $a < b$ . . . 3
Opérations . . . 3

Combinatoire **4**

Probabilités **5**

Calcul algébrique **6**
Identités remarquables . . . 6
Exponentielles et logarithmes . . . 6
Quelques sommes . . . 6
Equations et polynômes . . . 7

Analyse **8**
Parité . . . 8
Limites . . . 8
Asymptotes . . . 9
Plan d'étude d'une fonction . . . 9
Dérivées . . . 10
Intégrales . . . 11

Trigonométrie **14**
Conversion des mesures d'angle . . . 14
Triangle rectangle . . . 14
Triangle quelconque . . . 14
Valeurs exactes des fonctions trigonométriques de quelques arcs . . . 14
Relations trigonométriques . . . 15
Aire $\mathcal{A}$ de certains polygones . . . 16
Cercle et disque . . . 16
Aire $\mathcal{A}$ et Volume $\mathcal{V}$ de certains solides . . . 17

Géométrie **18**
Les lignes principales du triangle . . . 18

Géométrie analytique **19**

Quelques représentations graphiques **22**

Imprimé le 25 août 2008.

Réalisation : J. Delaporte
Modifications : J-Ph. Javet
M.-S. Dupertuis